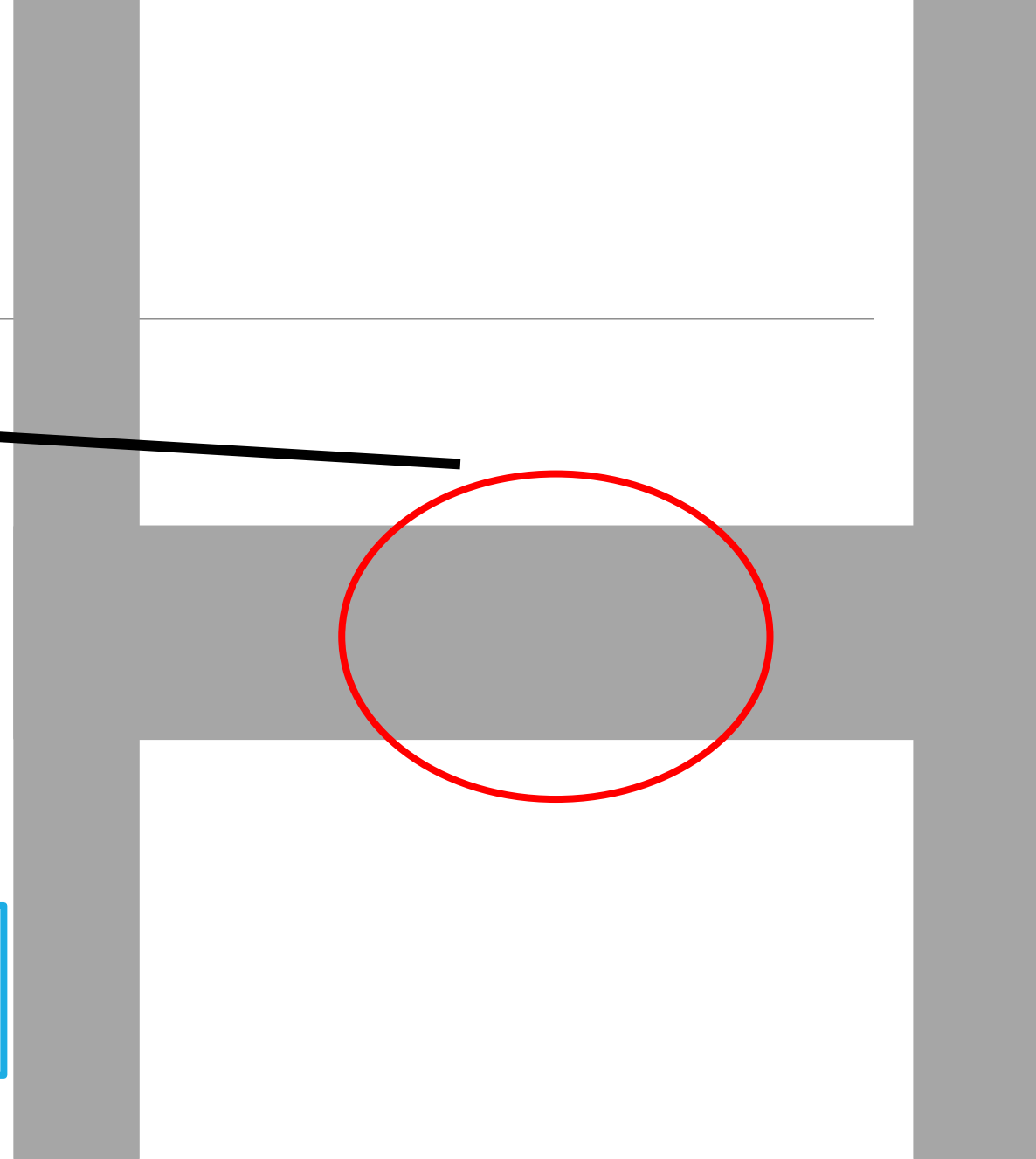
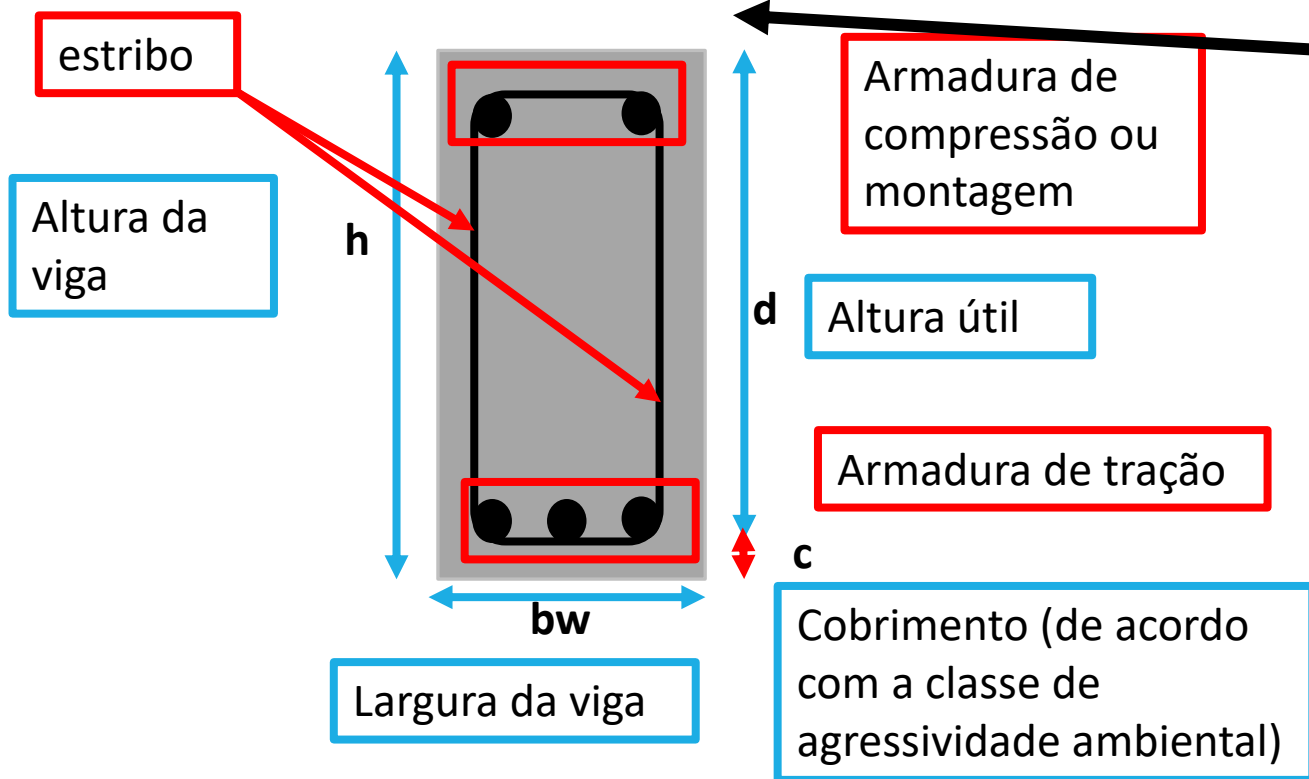


# Dimensionamento de vigas com armadura dupla

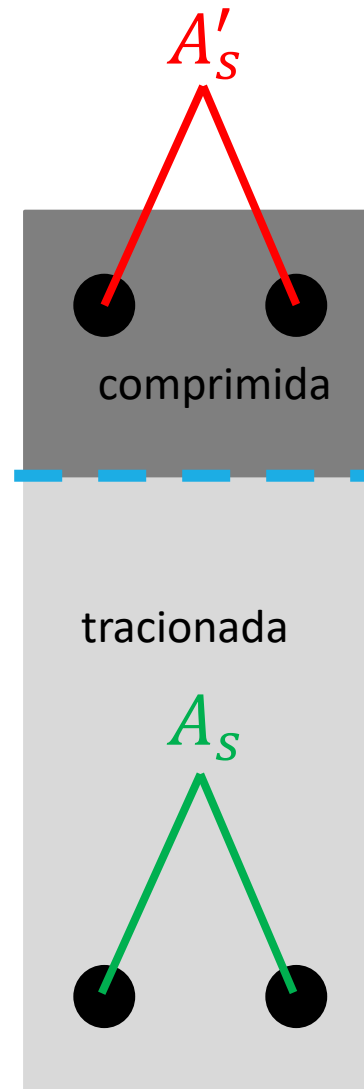
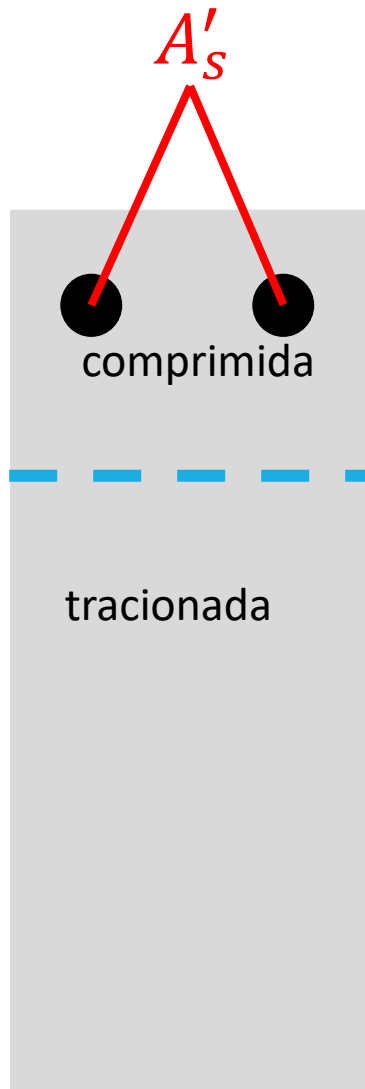
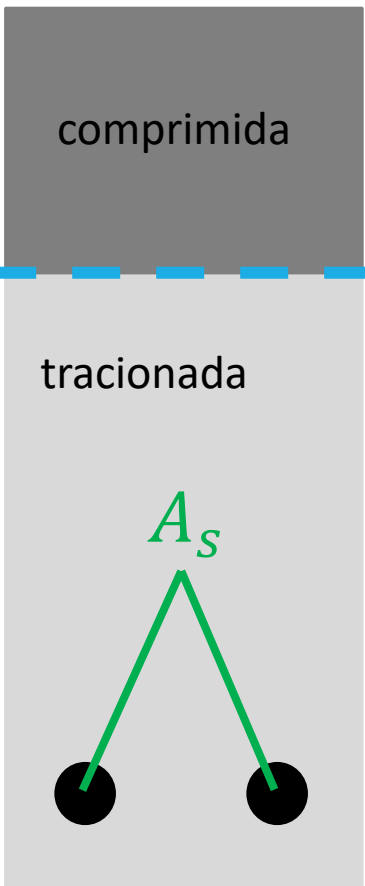
---

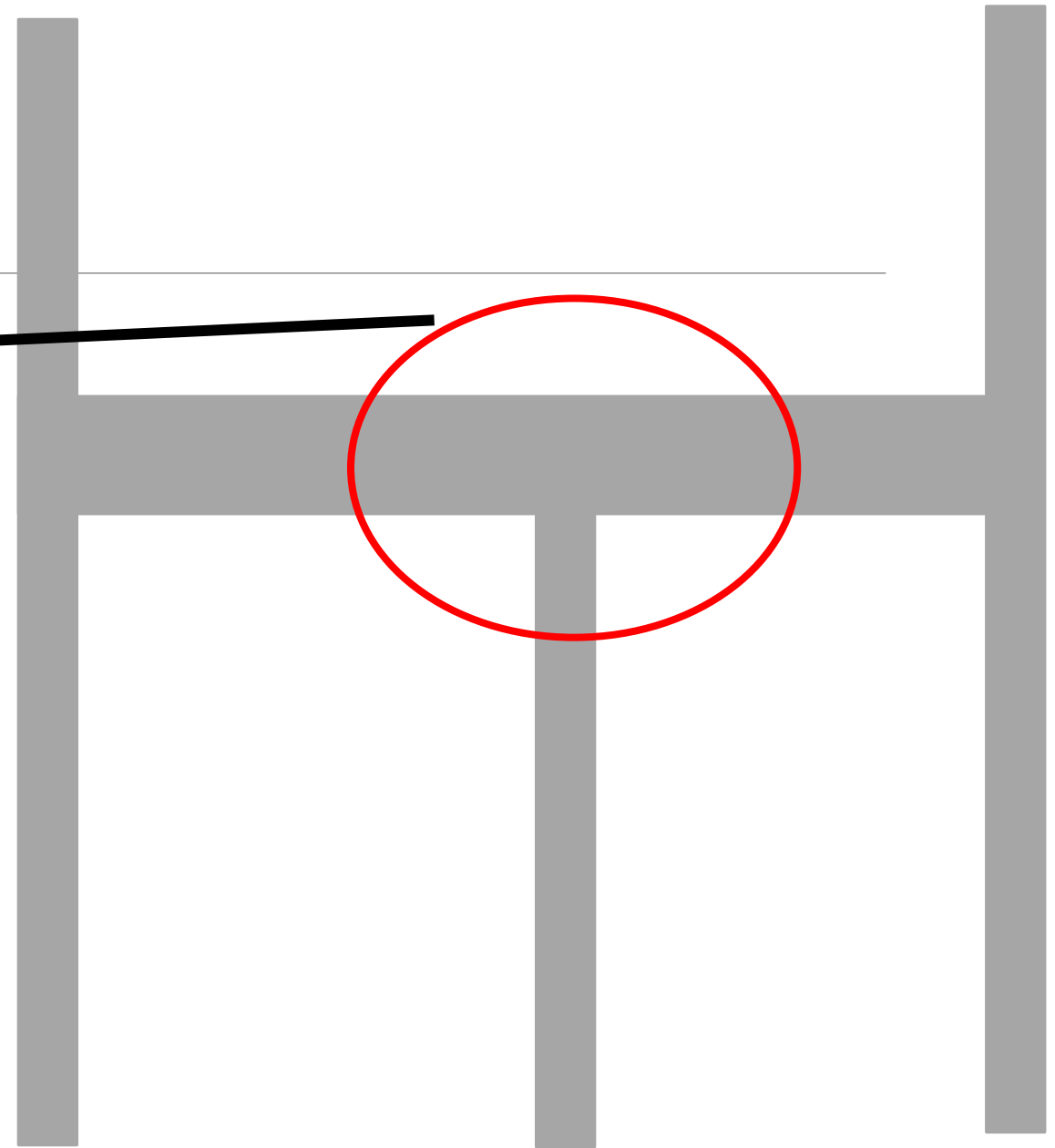
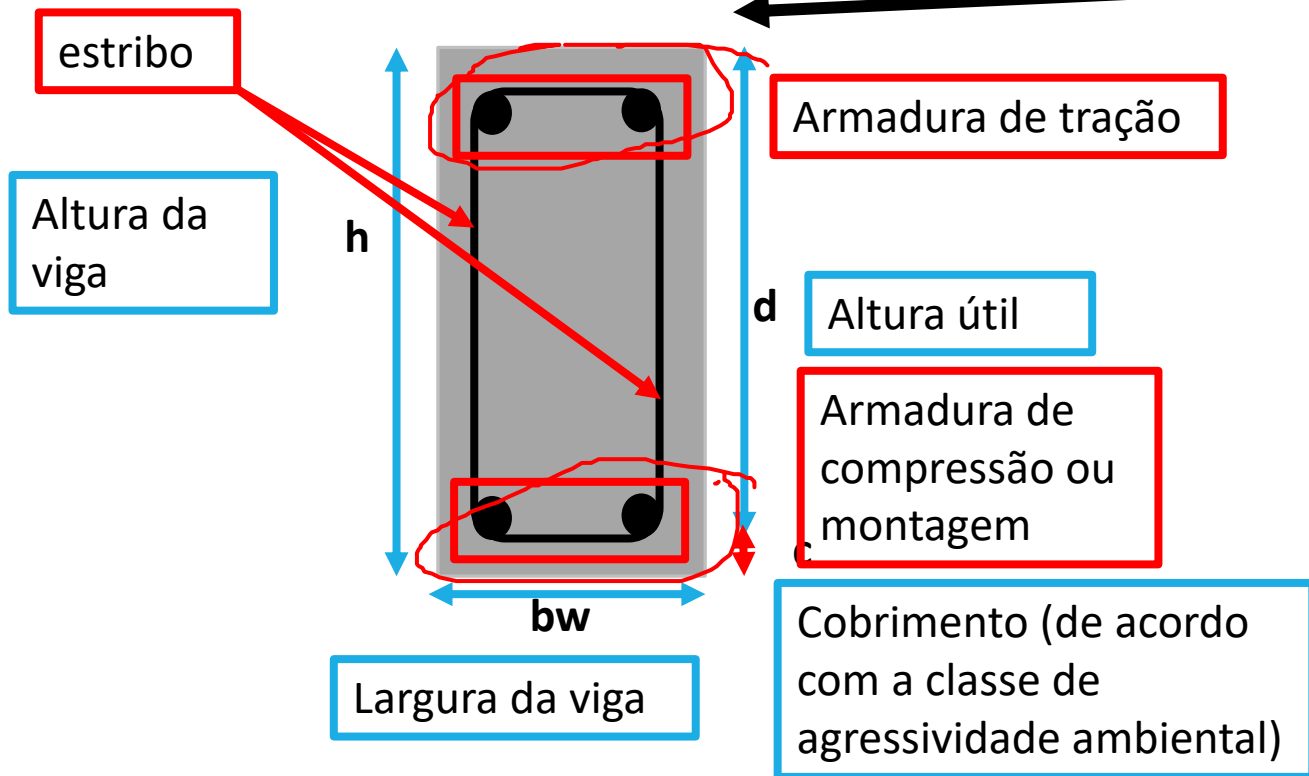
PROF. MSC PATRÍCIA ANDRADE

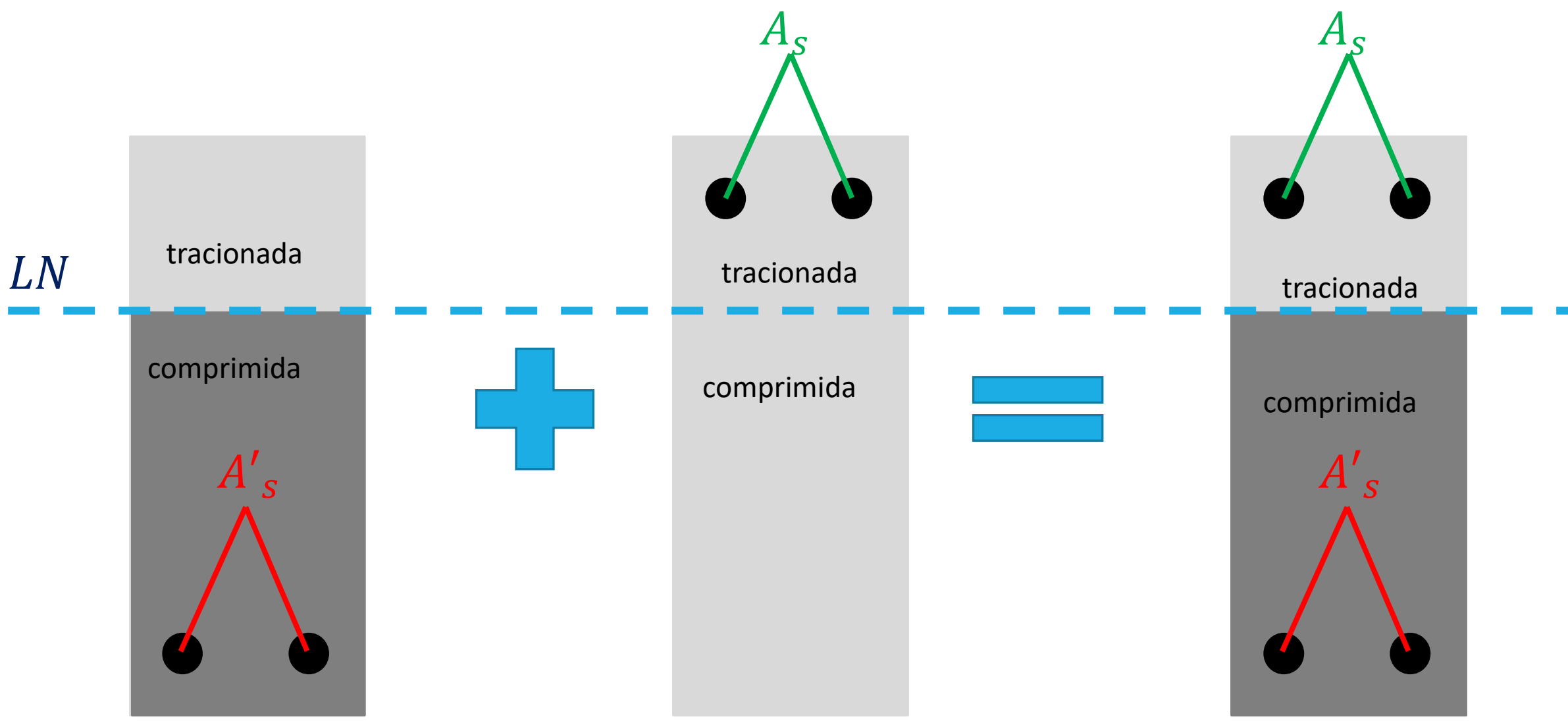




$LN$







# Por que algumas vigas precisam de armadura dupla?

Porque algumas vezes a armadura simples não é capaz de suportar sozinha todo carregamento e, por questões de custo e por limitações arquitetônicas, não é possível aumentar a altura da viga e nem comprar concreto com resistência característica ( $f_{ck}$ ) maior

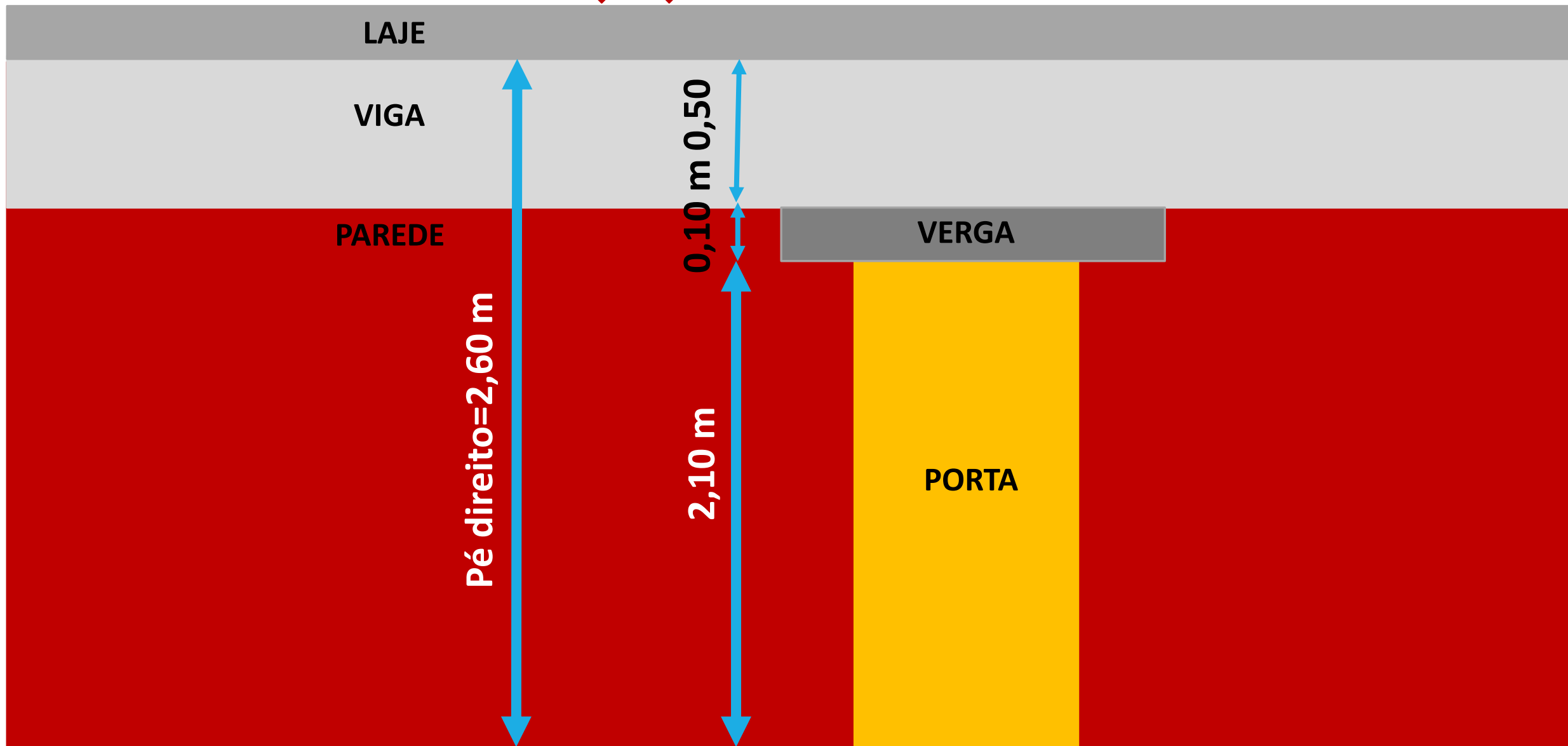
# Quando a saber que a viga precisa de armadura dupla?

Quando há limitações arquitetônicas e

- o domínio da viga for superior ao limite de ductilidade
- a altura útil ( $d$ ) existente na viga for inferior a altura útil mínima ( $d_{min}$ ) para um determinado carregamento



SITUAÇÃO NÃO IDEAL



LAJE

VIGA

PAREDE

Pé direito=2,60 m

0,10 m 0,50

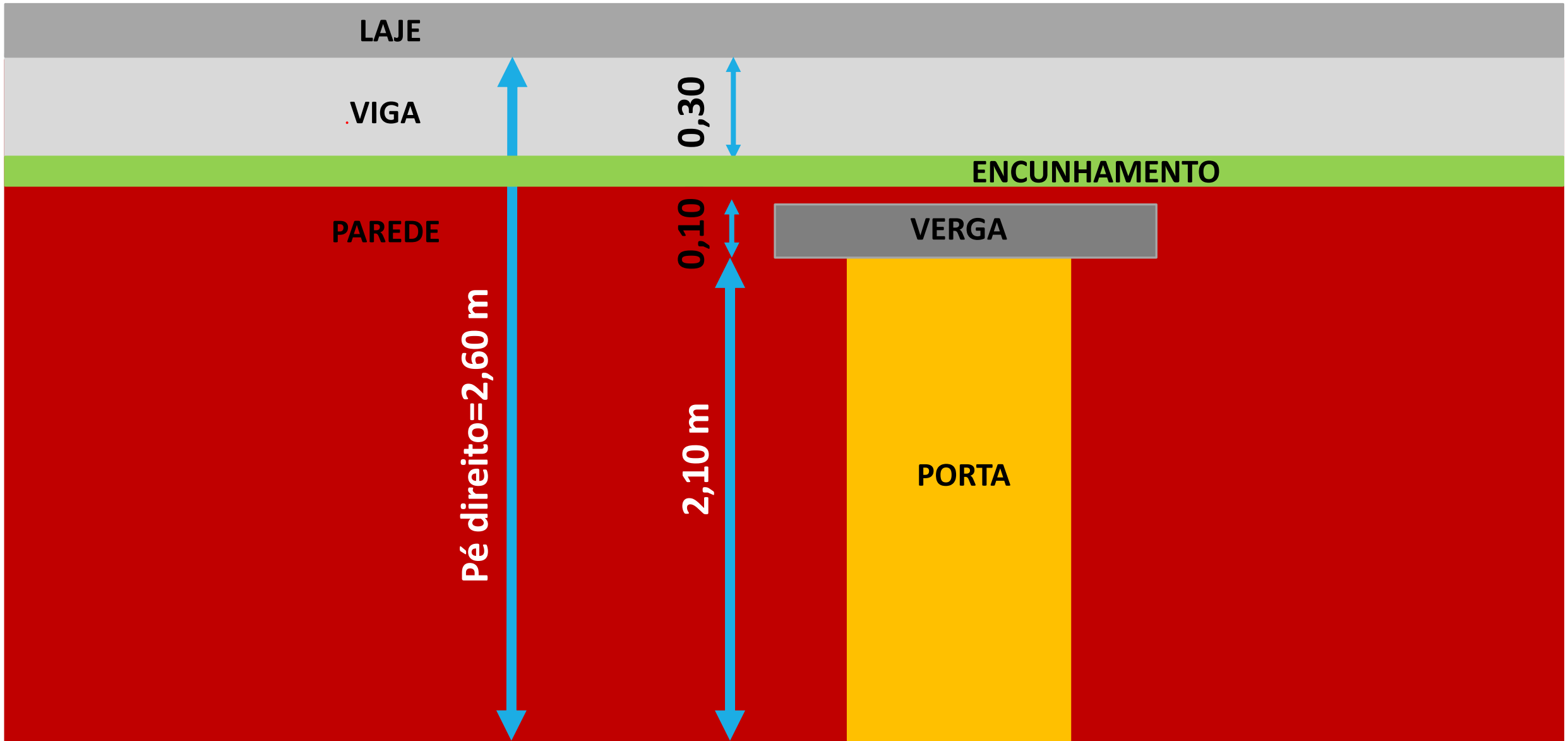
2,10 m

VERGA

PORTA

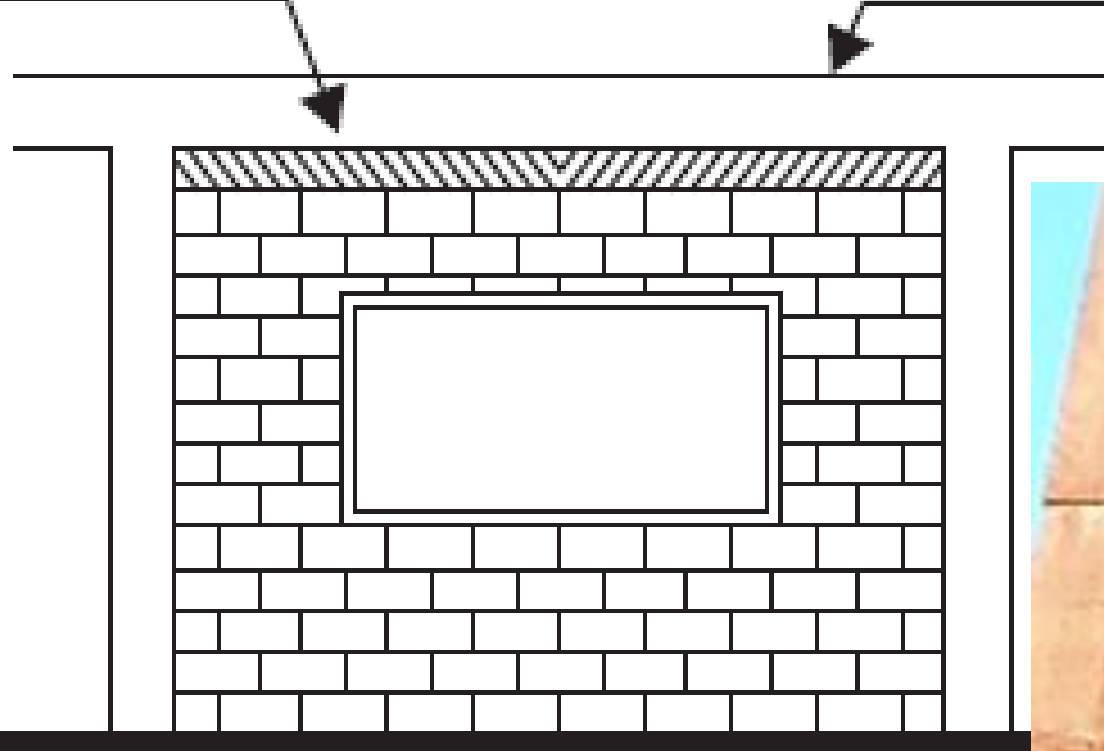


# SITUAÇÃO IDEAL

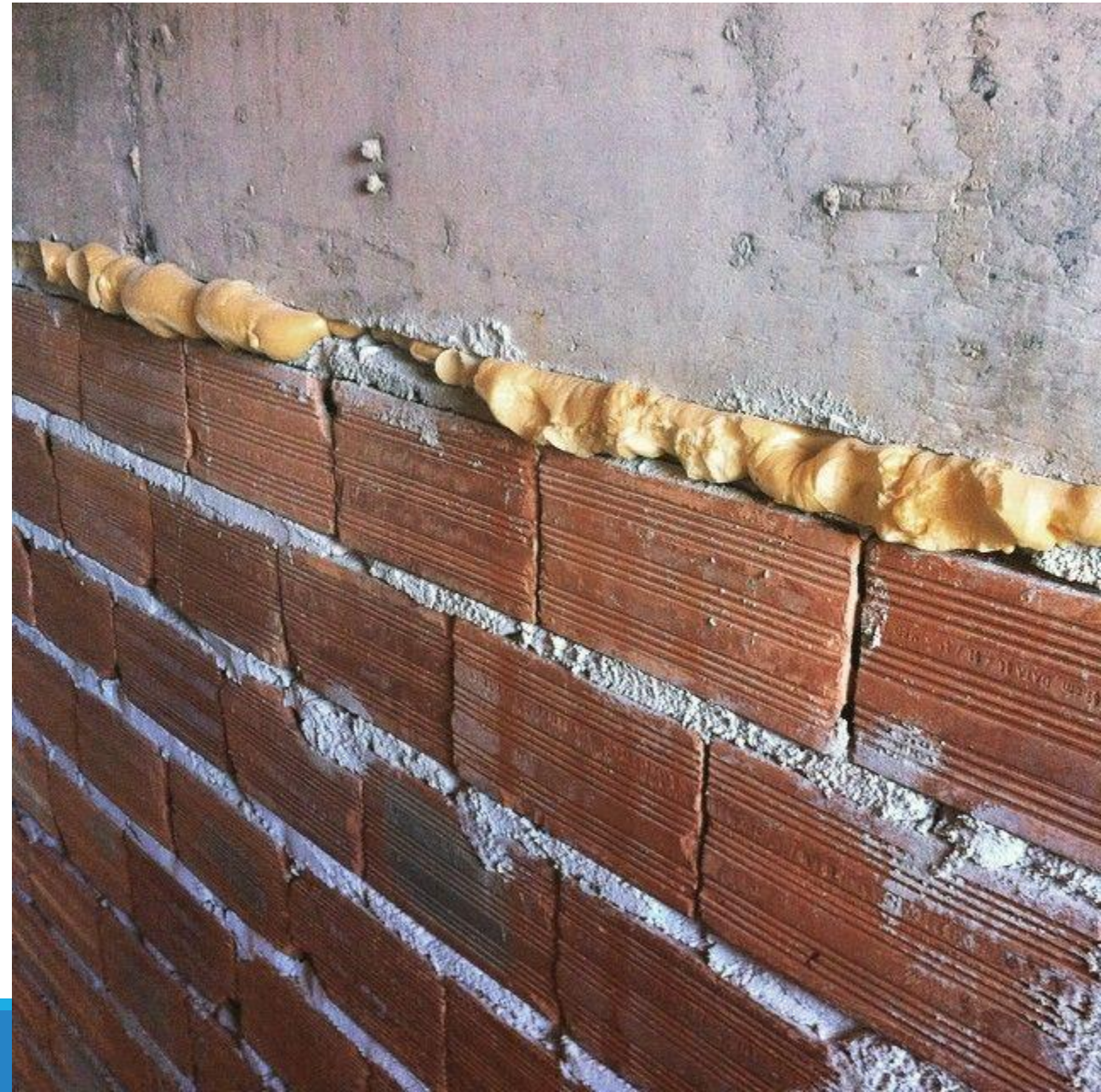
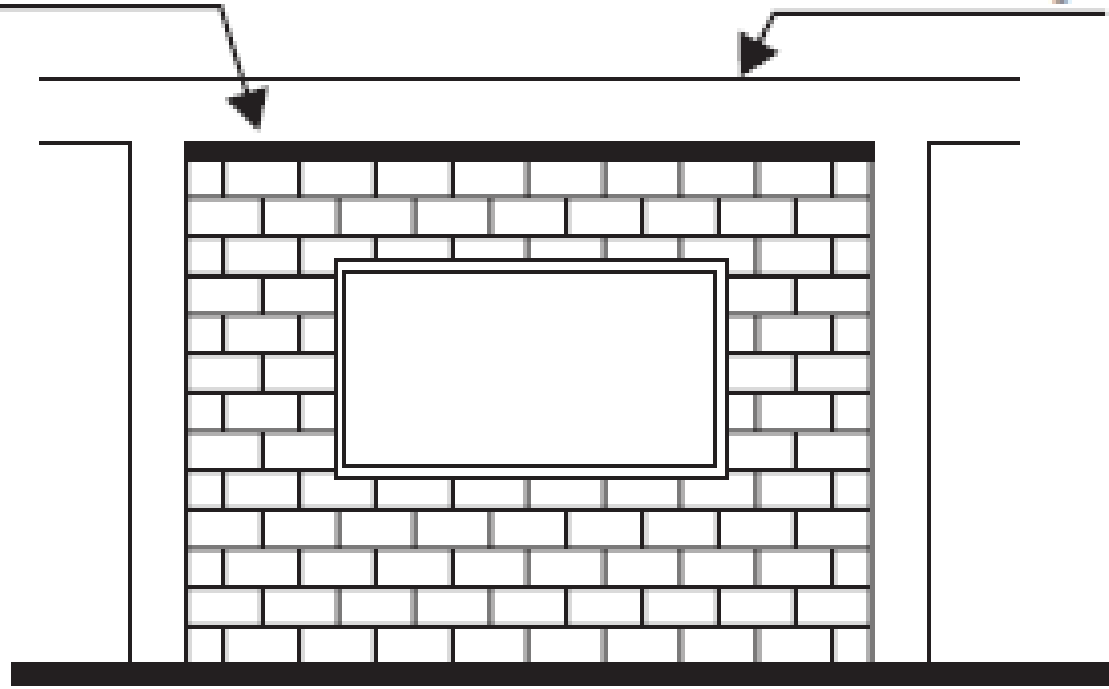


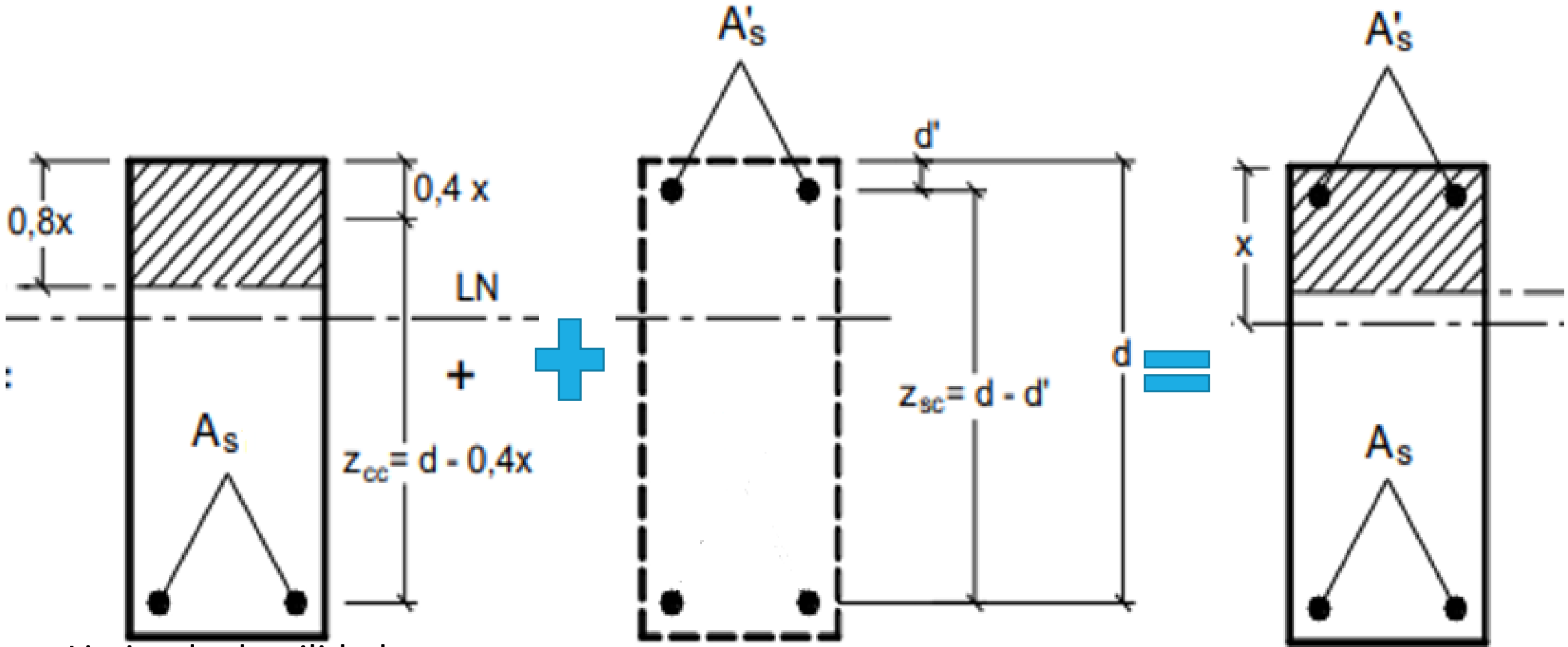
Encunhamento com  
tijolos maciços

Estrutura - viga



Encunhamento com  
espuma de poliuretano Estrutura - viga





Limite de ductilidade  
 $(x = x_{duc} = 0,45 * d)$   
 Momento limite ( $M_{lim}$ )  
 Armadura de tração ( $A_s$ )

Momento não absorvido pela  
 armadura de tração ( $M_2$ )  
 Armadura de compressão ( $A'_s$ )

Viga de armadura dupla

# Procedimento

---

1. Determinar as forças solicitantes de projeto
2. Determinar a altura da linha neutra ou a altura útil mínima

$$M_{sd} = \alpha_c * f_{cd} * \lambda * x * b_w * \left( d - \frac{\lambda * x}{2} \right)$$

OU

$$d_{min} = 2 * \sqrt{\frac{M_{sd}}{f_{cd} * b_w}}$$

$d_{min}$  é a altura útil mínima que a viga **DEVERIA** ter para que tenha uma armadura simples com altura da linha neutra no limite de ductilidade, ou seja,

$$x = x_{duc} = 0,45 * d$$

Esse valor deve ser comparado com a altura útil **existente** na viga

# Procedimento

---

## 3. Momento limite

Das equações de equilíbrio, temos que:

$$M_{sd} = \alpha_c * f_{cd} * \lambda * x * b_w * \left( d - \frac{\lambda * x}{2} \right)$$

Para um concreto do grupo 1  $\rightarrow \alpha_c = 0,85; \lambda = 0,8$

$$M_{sd} = 0,85 * f_{cd} * 0,8 * x * b_w * \left( d - \frac{0,8 * x}{2} \right)$$

$$M_{sd} = 0,68 * f_{cd} * x * b_w * (d - 0,4 * x)$$

# Procedimento

---

## 3. Momento limite

$$M_{sd} = 0,68 * f_{cd} * x * b_w * (d - 0,4 * x)$$

Como queremos encontrar o momento máximo que a armadura tracionada

Suporta no limite da ductilidade

$$\rightarrow x = x_{duc} = 0,45 * d$$

$$M_{sd} = 0,68 * f_{cd} * 0,45 * d * b_w * (d - 0,4 * 0,45 * d)$$

$$M_{sd} = 0,306 * f_{cd} * d * b_w * (d - 0,18 * d)$$

$$M_{sd} = 0,306 * f_{cd} * d * b_w * 0,82 * d$$

# Procedimento

---

## 3. Momento limite

$$M_{sd} = 0,306 * f_{cd} * d * b_w * 0,82 * d$$

$$M_{lim} = M_{sd \text{ máx arm de tração}} = 0,251 * f_{cd} * b_w * d^2$$

$M_{lim}$  momento máximo que armadura de tração suporta no limite de ductilidade

$$(x = x_{duc} = 0,45 * d)$$

# Procedimento

## 4. Determinar a área de aço ( $A_s$ )

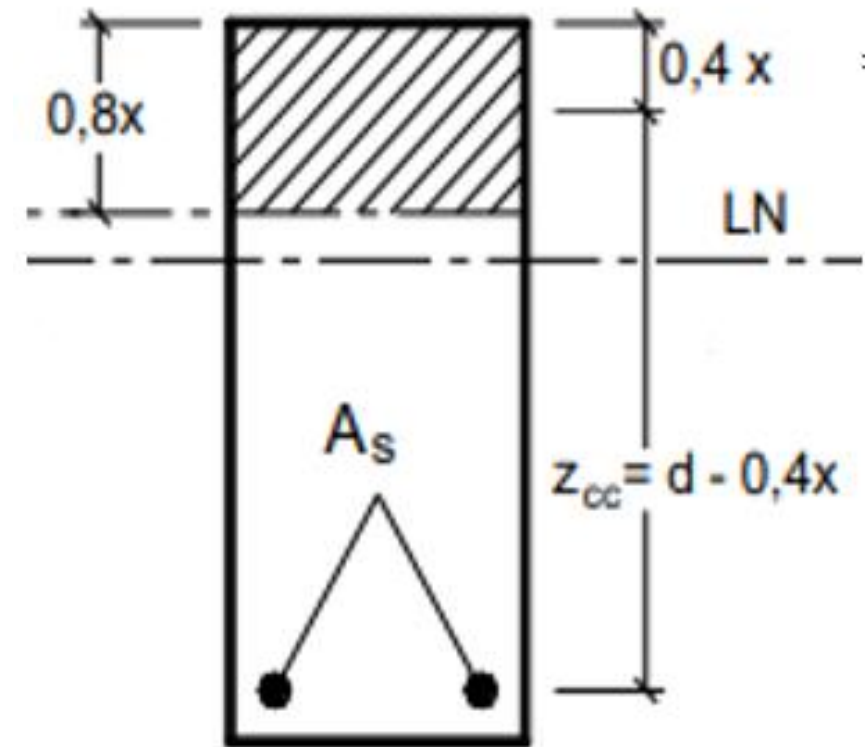
$$A_s = \frac{M_{lim}}{(d - 0,4 * x) * f_{yd}}$$

$$x = x_{duc} = 0,45 * d$$

$$A_s = \frac{M_{lim}}{(d - 0,4 * 0,45 * d) * f_{yd}}$$

$$A_s = \frac{M_{lim}}{0,82 * d * f_{yd}}$$

$$f_{yd} = \frac{f_y}{1,15}$$



# Procedimento

---

## 5. Determinar o momento absorvido pela armadura de compressão

$$M_2 = M_{sd} - M_{lim}$$

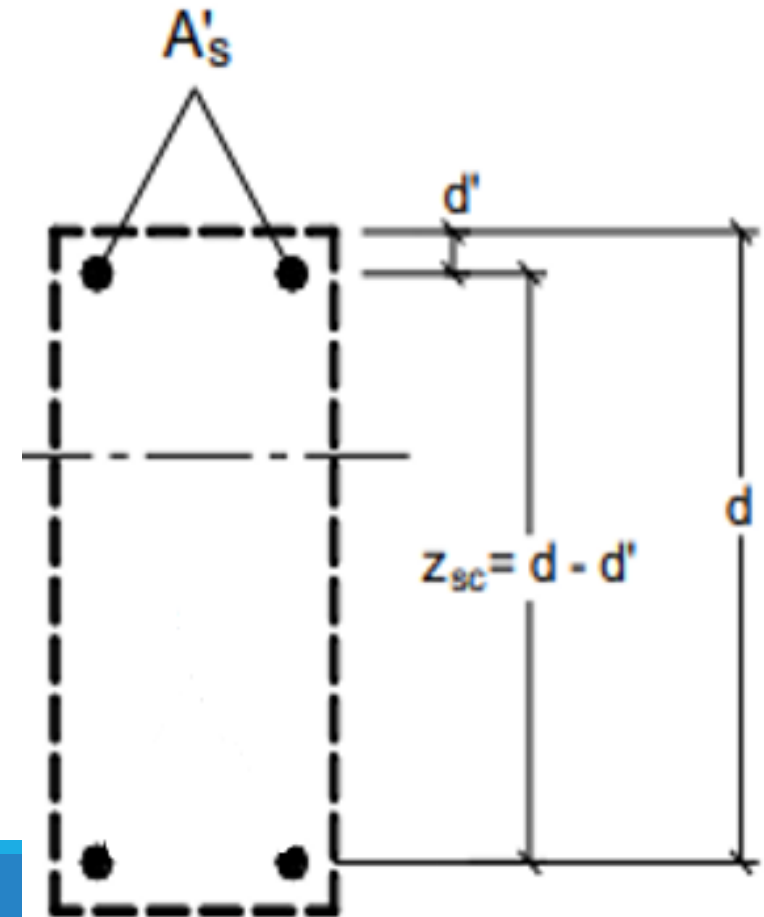
## 6. Altura útil linha ( $d'$ )

$$d' = c + \phi_e + \frac{\phi_L}{2}$$

$c$  o cobrimento

$\phi_e$  diâmetro do estribo

$\phi_L$  diâmetro da armadura longitudinal comprimida

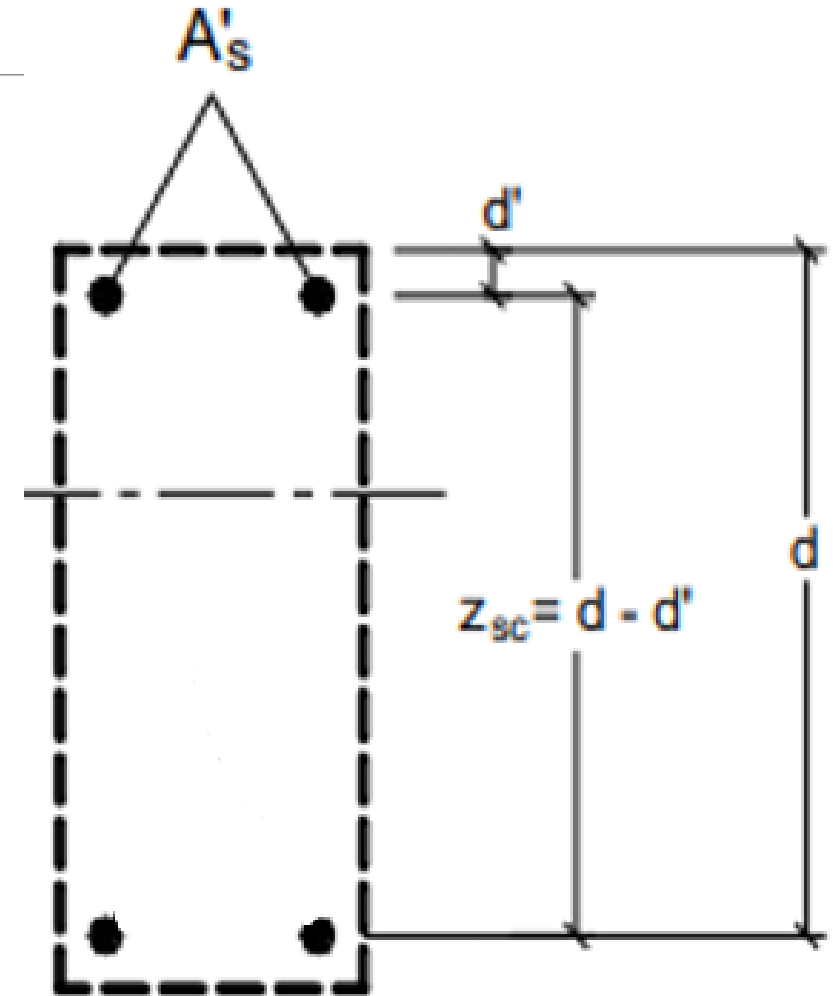


# Procedimento

---

## 7. Área de aço da armadura comprimida ( $A'_s$ )

$$A'_s = \frac{M_2}{(d - d') * f_{yd}}$$



# Exemplo

---

Determinar a armadura de uma viga biapoiada sob um momento  $M_{sk}=45\text{kNm}$  (cargas permanentes). A viga está limitada arquitetonicamente. A viga possui  $b_w=12\text{ cm}$ ,  $d=29\text{ cm}$ . Usar aço CA 50 e concreto  $f_{ck}\text{ 20MPa}$ . Considerar a existência de estribos com diâmetro 6,3 mm, Barras de aço longitudinais com diâmetro de 10 mm (comprimidas ou tracionadas).  $C=2,5\text{ cm}$  classe e agressividade I

# Resolução

---

## 1. Determinar as forças solicitantes de projeto

Dado

$M_{sk} = 45 \text{ kNm} \rightarrow$  cargas permanentes

$\gamma_g = 1,4$  (cargas permanentes)

$$M_{sd} = \gamma_g * M_{sk}$$

$$M_{sd} = 1,4 * 45$$

$$M_{sd} = 63 \text{ kN.m ou } 6300 \text{ kN.cm}$$

# Resolução

---

## 2. Determinação da altura da linha neutra

$$M_{sd} = \alpha_c * f_{cd} * \lambda * x * b_w * \left( d - \frac{\lambda * x}{2} \right)$$

$$\text{Concreto C20} \rightarrow f_{ck} = 20 \text{ MPa} < 50 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \alpha_c = 0,85 \text{ e } \lambda = 0,8$$

$$M_{sd} = 0,85 * f_{cd} * 0,8 * x * b_w * \left( d - \frac{0,8 * x}{2} \right)$$

$$6300 = 0,68 * \frac{2}{1,4} * x * 12 * (29 - 0,4 * x)$$

$$\frac{6300}{12 * 0,68 * \left( \frac{2}{1,4} \right)} = x * (29 - 0,4 * x)$$

# Resolução

---

## 2. Determinação da altura da linha neutra

$$540,3 = 29 * x - 0,4 * x^2$$

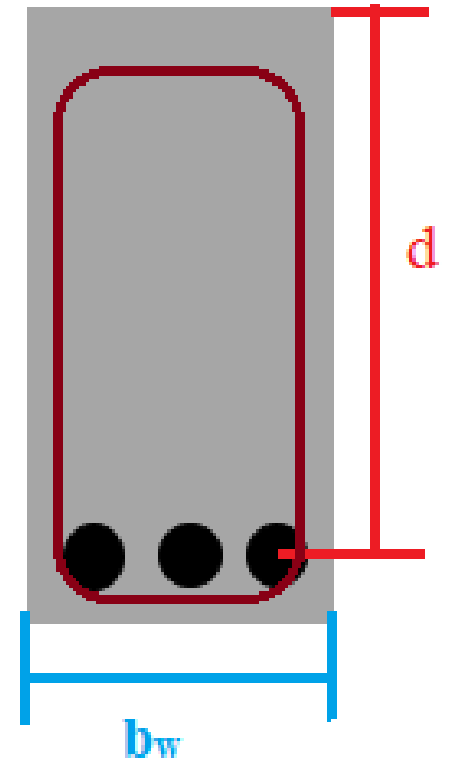
$$0 = -0,4 * x^2 + 29 * x - 540,3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * c}}{2 * a}$$

$$x = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - (4 * -0,4 * -540,3)}}{2 * -0,4}$$

$$x_1 = 42,31 \text{ cm}$$

$$x_2 = 30,19 \text{ cm}$$



# Resolução

---

## 2. Determinação da altura da linha neutra

$$x_1 = 42,31 \text{ cm}$$

$$x_2 = 30,19 \text{ cm}$$

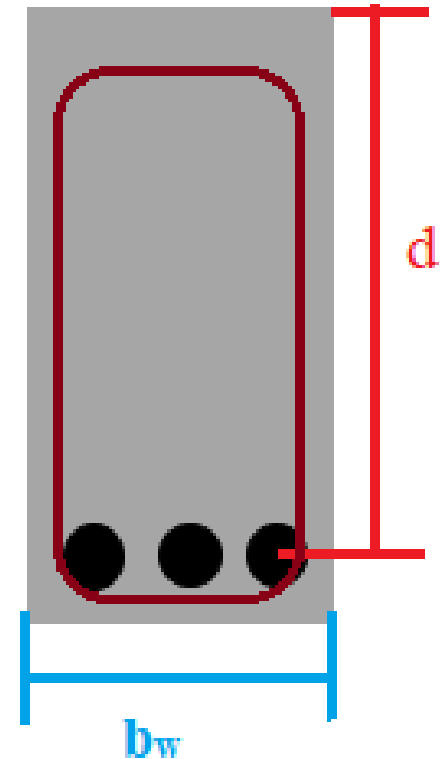
$$x_{duc} = 0,45 * d$$

$$x_{duc} = 0,45 * 29$$

$$x_{duc} = 13,05 \text{ cm}$$

$$x_{duc} = 13,05 \text{ cm} < x_2 = 30,19 \text{ cm}$$

→ a viga não atende a ductilidade



# Procedimento

## 2. Determinar a altura da linha neutra ou a altura útil mínima

$$d_{min} = 2 * \sqrt{\frac{M_{sd}}{f_{cd} * b_w}}$$

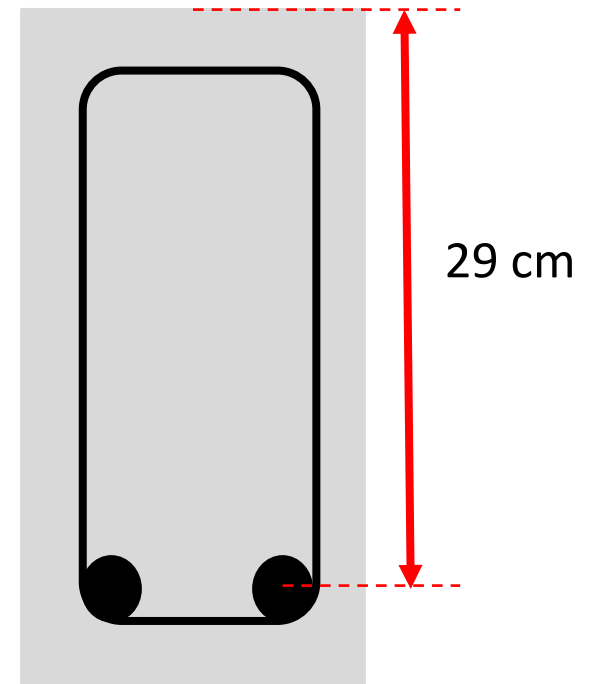
$$d_{min} = 2 * \sqrt{\frac{6300}{\left(\frac{2}{1,4}\right) * 12}}$$

$$d_{min} = 38,34 \text{ cm}$$

Mas a viga só tem  $d=29 \text{ cm}$ , ou seja,

$$d_{min} = 38,34 \text{ cm} > d = 29 \text{ cm}$$

→ será necessário uma viga de armadura dupla!!!!



# Resolução

---

## 3. Momento limite

$$M_{lim} = 0,251 * f_{cd} * b_w * d^2$$

$$M_{lim} = 0,251 * \frac{2}{1,4} * 12 * 29^2$$

$$M_{lim} = 3618,7 \text{ kN.cm}$$

# Resolução

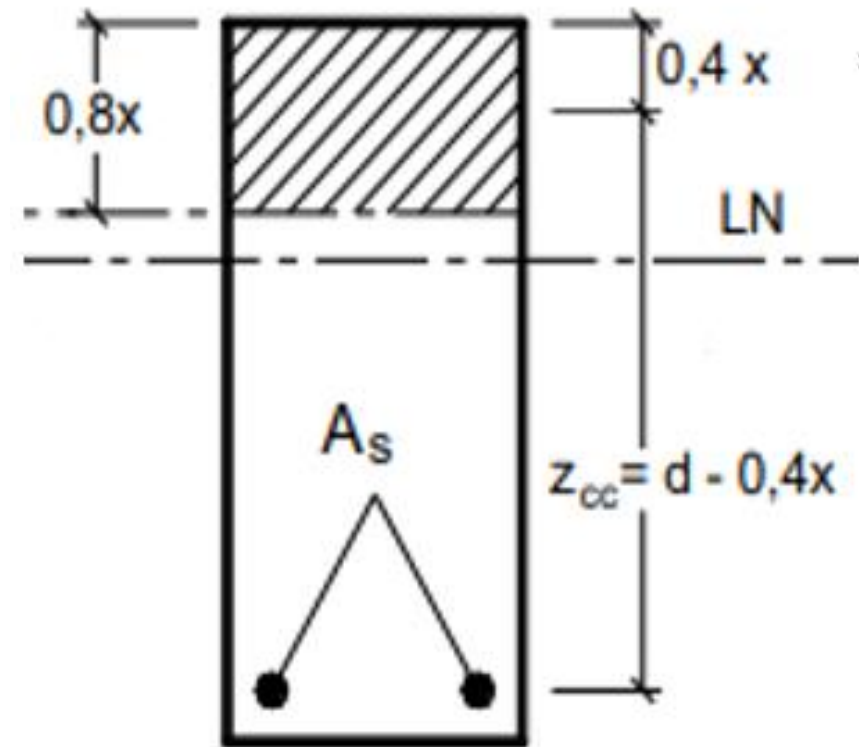
## 4. Determinar a área de aço ( $A_s$ )

$$A_s = \frac{M_{lim}}{(d - 0,4 * x) * f_{yd}}$$

$$\rightarrow x = x_{duc} = 0,45 * d$$

$$A_s = \frac{3618,7}{(d - 0,4 * 0,45 * d) * \frac{f_y}{1,15}}$$

$$A_s = \frac{3618,7}{(29 - 0,4 * 0,45 * 29) * \frac{50}{1,15}}$$



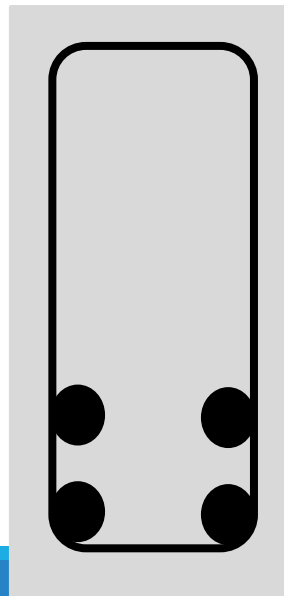
# Resolução

## 4. Determinar a área de aço ( $A_s$ )

$$A_s = \frac{3618,70}{(29 - 0,4 * 0,45 * 29) * \frac{50}{1,15}}$$

$$A_s = 3,5 \text{ cm}^2$$

Adotar 4Φ 12,5 mm



Diâmetro (mm)	Área unitária ( $A_{uni}$ ) (cm <sup>2</sup> )	Número de barras
8	0,50	3,49/0,5 = 7
10	0,78	5
12,5	1,23	3
16	2,01	2
20	3,14	2

# Resolução

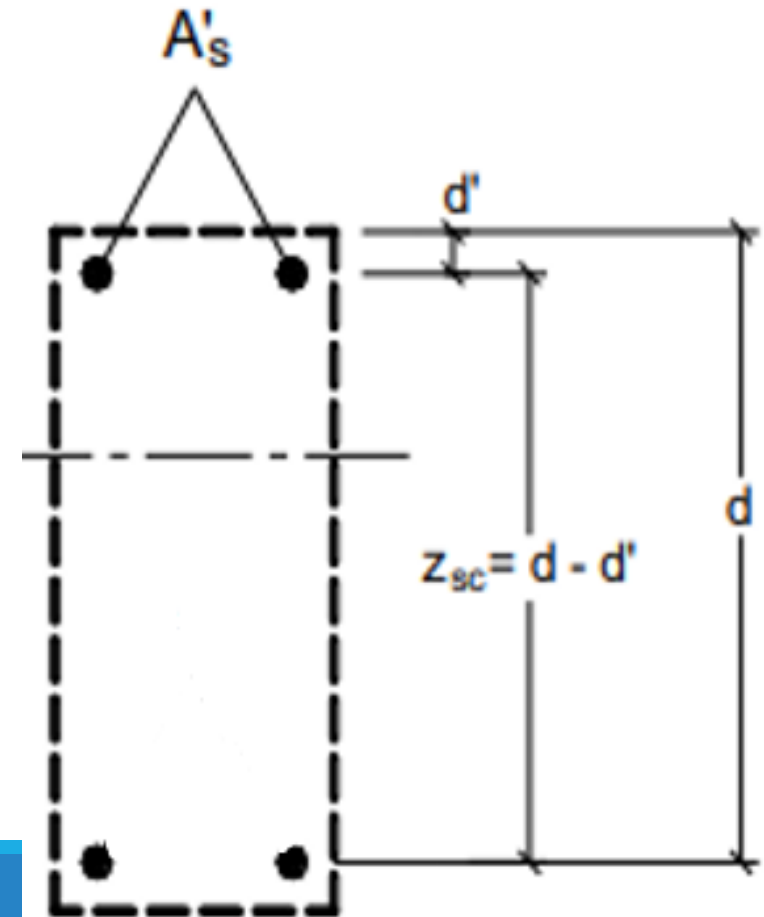
---

## 5. Determinar o momento absorvido pela armadura de compressão

$$M_2 = M_{sd} - M_{lim}$$

$$M_2 = 6300 - 3618,7$$

$$M_2 = 2681,3 \text{ kN.cm}$$



# Resolução

---

## 6. Altura útil linha (d')

$$d' = c + \phi_e + \frac{\phi_L}{2}$$

cobrimento  $\rightarrow c=2,5$  cm

$\phi_e$  diâmetro do estribo

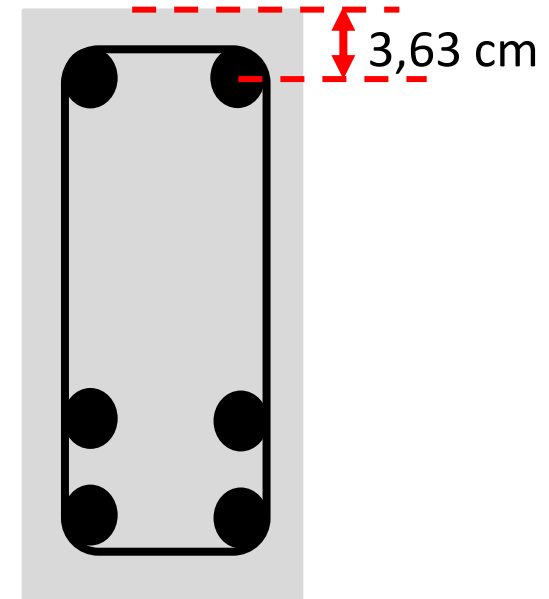
$\phi_e = 6,3$  mm ou 0,63 cm

$\phi_L$  diâmetro da armadura longitudinal comprimida

Adotar  $\phi_L = 10$  mm

$$d' = 2,5 + 0,63 + \frac{1}{2}$$

$$d' = 3,63 \text{ cm}$$



# Resolução

## 7. Área de aço da armadura comprimida ( $A's$ )

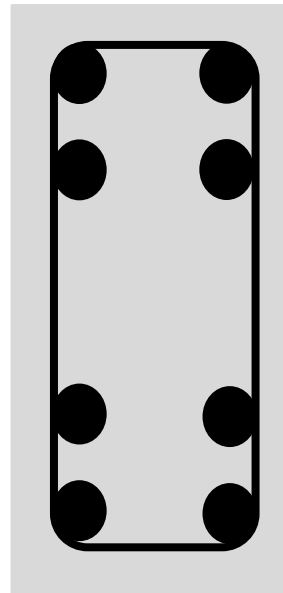
$$A's = \frac{M_2}{(d - d') * f_{yd}}$$

$$A_{s'} = \frac{2681,3}{(29 - 3,63) * \left(\frac{50}{1,15}\right)}$$

$$A_{s'} = 2,43 \text{ cm}^2$$

Adotar 4Φ 10 mm

Ou 2Φ 12,5 mm



Diâmetro (mm)	Área unitária ( $A_{uni}$ ) (cm <sup>2</sup> )	Número de barras
8	0,50	2,44/0,5 = 5
10	0,78	4
12,5	1,23	2
16	2,01	2
20	3,14	1