

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

UNESP - Campus de Bauru/SP

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

**2123 - ESTRUTURAS DE CONCRETO II**

**FLEXÃO COMPOSTA E PILARES DE  
CONCRETO ARMADO**

**Prof. Dr. PAULO SÉRGIO BASTOS**

([wwwp.feb.unesp.br/pbastos](http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos))

Bauru/SP

Set/2021

# APRESENTAÇÃO

Esta publicação tem o objetivo de servir como notas de aula na disciplina 2123 – Estruturas de Concreto II, do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de Bauru/SP. Encontram-se publicadas no **YOUTUBE** 15 videoaulas da apostila, no canal “Paulo Sergio Bastos”.

O texto contém duas partes: Flexão Composta e Pilares. Na primeira parte são apresentadas as formulações da Flexão Composta para o dimensionamento de elementos de seção retangular, com ênfase à Flexão Composta Normal. A segunda parte apresenta prescrições contidas na NBR 6118/2014 (“*Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*”) para o dimensionamento de pilares de Concreto Armado.

O dimensionamento dos pilares é feito segundo dois métodos com base no pilar padrão: a) com curvatura aproximada; b) com rigidez aproximada; considerando o momento fletor mínimo ou a excentricidade acidental. São estudados os pilares de seção retangular e de nós fixos (contraventados), com índice de esbeltez máximo até 90. A apresentação do dimensionamento dos pilares é feita conforme a clássica divisão em pilares intermediários, de extremidade e de canto.

Para fins didáticos os cálculos de dimensionamento são apresentados de maneiras diferentes, explicitando os momentos fletores atuantes ou as excentricidades, bem como com a equação direta da norma. Conhecendo os diferentes modos o estudante poderá escolher aquele de sua preferência, inclusive elaborar roteiros simples e objetivos. Vários exemplos numéricos estão apresentados para cada um dos três tipos de pilares.

Críticas e sugestões serão bem-vindas.

# SUMÁRIO

## PARTE I – FLEXÃO COMPOSTA 1

### 1. INTRODUÇÃO 1

### 2. CONCEITOS INICIAIS 1

2.1 *Diagrama Tensão-Deformação do Concreto* 1

2.1 *Diagrama Tensão-Deformação do Aço* 3

2.2 *Solicitações Normais* 3

2.3 *Domínios de Deformações* 5

2.3.1 Reta a e Domínio 1 5

2.3.2 Domínio 2 6

2.3.3 Domínio 3 7

2.3.4 Domínio 4 8

2.3.5 Domínio 4a 8

2.3.6 Domínio 5 e Reta b 9

2.4 *Hipóteses Básicas* 9

### 3. FLEXÃO COMPOSTA NORMAL 9

3.1 *Tração Simples e Flexo-Tração com Pequena Excentricidade* 10

3.1.1 Exemplo 11

3.2 *Flexo-Compressão e Flexo-Tração com Grande Excentricidade* 12

3.2.1 Flexo-Compressão 13

3.2.2 Flexo-Tração 13

3.2.3 Equações de Compatibilidade 14

3.2.4 Exemplo 1 15

3.2.5 Exemplo 2 16

3.2.6 Exemplo 3 18

3.2.7 Equações com Coeficientes Dimensionais K 20

3.2.8 Exemplo 4 22

3.2.9 Exemplo 5 23

3.3 *Flexo-Compressão com Pequena Excentricidade* 25

3.3.1 Equações para  $0,8x < h$  25

3.3.2 Equações para  $0,8x \geq h$  25

3.3.3 Definição das Armaduras 26

3.3.4 Exemplo 1 27

3.3.5 Exemplo 2 28

3.4 *Equações Adimensionais* 29

3.4.1 Duas Armaduras Tracionadas 29

3.4.2 Uma Armadura Tracionada e outra Comprimida 30

3.4.3 Duas Armaduras Comprimidas 30

3.5 *Ábaco com Armadura Bilateral Simétrica* 31

3.6 *Cálculo da Armadura com Ábacos* 32

### 4. FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA 34

4.1 *Cálculo da Armadura com Ábacos* 34

## REFERÊNCIAS 35

## **PARTE II – PILARES DE CONCRETO ARMADO 36**

### **5. INTRODUÇÃO 36**

### **6. ESPECIFICAÇÕES DO CONCRETO E DO COBRIMENTO 36**

### **7. CONCEITOS INICIAIS 39**

7.1 *Definições 39*

7.2 *Flambagem 39*

7.3 *Comprimento Equivalente e Índice de Esbeltez 40*

7.4 *Noções sobre Contraventamento de Estruturas 42*

7.4.1 *Estruturas de Nós Fixos e Móveis 43*

7.4.2 *Elementos Isolados 44*

7.5 *Não Linearidade Física e Geométrica 45*

7.6 *Equação da Curvatura de Elementos Fletidos 47*

7.7 *Definição de Pilar-Padrão e da Curvatura Aproximada 49*

### **8. EXCENTRICIDADES 52**

8.1 *Excentricidade de 1ª Ordem 52*

8.2 *Excentricidade Acidental 53*

8.3 *Excentricidade de 2ª Ordem Local e Valor-Limite  $\lambda_1$  55*

8.4 *Excentricidade Devida à Fluência 56*

### **9. SITUAÇÕES BÁSICAS DE PROJETO 56**

9.1 *Pilar Intermediário 57*

9.2 *Pilar de Extremidade 57*

9.3 *Pilar de Canto 59*

### **10. DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR TOTAL 60**

10.1 *Cálculo com o Momento Fletor Mínimo 61*

10.1.1 *Momento Fletor Mínimo 61*

10.1.2 *Método do Pilar-Padrão com Curvatura Aproximada 62*

10.1.2.1 *Cálculo Via Diagramas de Momentos Fletores ou Excentricidades 63*

10.1.2.2 *Cálculo Via Equação do Momento Fletor Total 68*

10.1.3 *Método do Pilar-Padrão com Rigidez  $\kappa$  Aproximada 68*

10.1.4 *Envoltória de Momentos Fletores Mínimos 69*

10.2 *Cálculo com a Excentricidade Acidental 70*

10.2.1 *Pilar Intermediário 70*

10.2.2 *Pilar de Extremidade 71*

10.2.3 *Pilar de Canto 72*

### **11. DISPOSIÇÕES CONSTRUTIVAS 72**

11.1 *Dimensão Mínima e Coeficiente de Ponderação ( $\gamma_n$ ) 72*

11.2 *Armadura Longitudinal 73*

11.2.1 *Diâmetro Mínimo 73*

11.2.2 *Distribuição Transversal 73*

11.2.3 *Armadura Mínima e Máxima 74*

11.2.4 *Detalhamento da Armadura 74*

11.2.5 *Proteção contra Flambagem 74*

11.3 *Armadura Transversal 75*

11.4 *Pilares-Parede 76*

**12. ROTEIRO DE CÁLCULO DE PILARES 76**

**13. EXEMPLOS NUMÉRICOS 77**

*13.1 Pilares Intermediários 77*

- 13.1.1 Exemplo 1 77
- 13.1.2 Exemplo 2 84
- 13.1.3 Exemplo 3 88
- 13.1.4 Exemplo 4 92

*13.2 Pilares de Extremidade 95*

- 13.2.1 Exemplo 1 95
- 13.2.2 Exemplo 2 102
- 13.2.3 Exemplo 3 108
- 13.2.4 Exemplo 4 114

*13.3 Pilares de Canto 119*

- 13.3.1 Exemplo 1 120
- 13.3.2 Exemplo 2 128
- 13.3.3 Exemplo 3 135

**14. ESTIMATIVA DE CARGA VERTICAL EM PILARES POR ÁREA DE INFLUÊNCIA E PRÉ-DIMENSIONAMENTO DA SEÇÃO TRANSVERSAL 142**

**15. EXEMPLOS DE DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE UMA EDIFICAÇÃO DE BAIXA ALTURA 143**

*15.1 Pilar Intermediário P8 146*

*15.2 Pilar de Extremidade P5 151*

*15.3 Pilar de Extremidade P6 155*

*15.4 Pilar de Canto P1 159*

**REFERÊNCIAS 165**

**BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR 165**

**TABELAS ANEXAS 167**

**ANEXOS 170**

**16. ANEXO A – FLEXÃO COMPOSTA NORMAL 170**

*16.1 Tração Simples e Flexo-Tração com Pequena Excentricidade 170*

- 16.1.1 Exemplo 1 171

*16.2 Flexo-Compressão e Flexo-Tração com Grande Excentricidade 173*

- 16.2.1 Exemplo 1 174
- 16.2.2 Exemplo 2 175

*16.3 Compressão Simples e Flexo-Compressão com Pequena Excentricidade 176*

- 16.3.1 Definição das Armaduras 177
- 16.3.2 Armadura Unilateral 178
- 16.3.3 Compressão Simples 178

## PARTE I – FLEXÃO COMPOSTA

### 1. INTRODUÇÃO

Esta Parte I do texto apresenta o dimensionamento de peças solicitadas à *Flexão Composta Normal* e *Oblíqua*, conforme as prescrições da NBR 6118<sup>1</sup>. Os parâmetros aplicados são aqueles da norma referentes apenas para os concretos do Grupo I de resistência (do C20 ao C50).<sup>2</sup>

A *Flexão Composta Normal e Oblíqua* aplica-se no dimensionamento de pilares, tirantes, vigas e lajes. As vigas por exemplo, são comumente solicitadas à flexão simples, no entanto, existem situações em que também atuam forças normais, como em muros de arrimo, estruturas de edifícios analisadas na forma de pórticos planos ou espacial sob ação do vento, projetos de estruturas industriais com máquinas ou equipamentos que induzem forças nas vigas, etc.

### 2. CONCEITOS INICIAIS

Para o estudo da *Flexão Composta* é necessário o conhecimento de alguns conceitos básicos, como os domínios de deformações e os diagramas *tensão x deformação* do concreto e do aço.

#### 2.1 Diagrama Tensão-Deformação do Concreto

Para o dimensionamento de seções transversais de peças de concreto no Estado-Limite Último, a NBR 6118 (item 8.2.10.1) indica os seguintes diagramas  $\sigma \times \varepsilon$ :

##### a) concretos do Grupo I (C20 ao C50)

O diagrama chamado *parábola-retângulo* é composto por uma parábola do 2º grau com vértice na deformação de encurtamento de 2 ‰ e ordenada  $0,85f_{cd}$ , e de uma reta entre as deformações 2 ‰ e 3,5 ‰ (Figura 1). A equação da parábola é:

$$\sigma_{cd} = 0,85f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. 1}$$

com  $f_{cd}$  sendo a resistência de cálculo do concreto à compressão ( $f_{ck} / \gamma_c$ ) e  $\varepsilon_c$  a deformação de encurtamento no concreto.

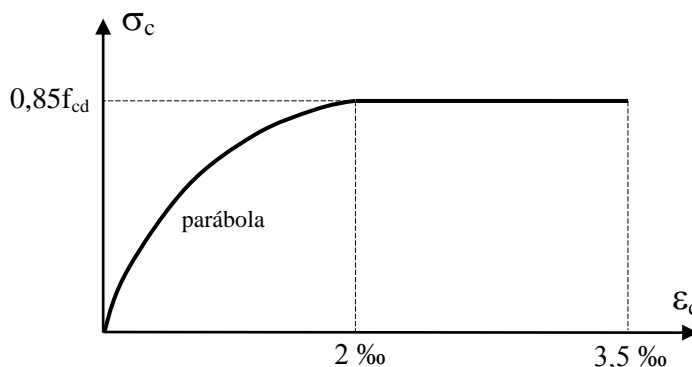


Figura 1 – Diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  à compressão para concretos do Grupo I (C20 ao C50).

<sup>1</sup> ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, NBR 6118. ABNT, 2014, 238p.

<sup>2</sup> Para os concretos do Grupo II alguns parâmetros devem ser alterados, relativos principalmente ao diagrama tensão x deformação do concreto.

### b) concretos do Grupo II (C55 ao C90)

O diagrama *parábola-retângulo* é composto por uma parábola do 2º grau com vértice na deformação  $\varepsilon_{c2}$  e ordenada  $0,85f_{cd}$ , e de uma reta entre as deformações  $\varepsilon_{c2}$  e  $\varepsilon_{cu}$  (Figura 2).

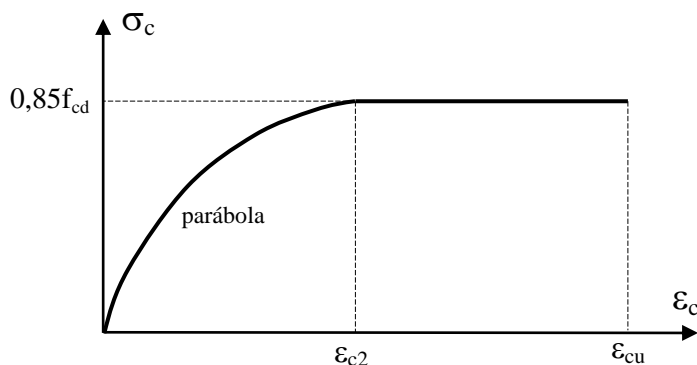


Figura 2 – Diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  à compressão para concretos do Grupo II (C55 ao C90).<sup>3</sup>

A equação da parábola é:

$$\sigma_{cd} = 0,85f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad , \text{ com } n = 1,4 + 23,4 \left[ \frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \quad \text{Eq. 2}$$

$$\varepsilon_{c2} = 2,0 \text{ ‰} + 0,085 \text{ ‰} (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad \text{Eq. 3}$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6 \text{ ‰} + 35 \text{ ‰} \left[ \frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \quad \text{Eq. 4}$$

Os diagramas *parábola-retângulo* podem ser substituídos por um diagrama chamado *retangular simplificado* (Figura 3), com altura  $y$  e tensão de compressão  $\sigma_{cd}$ :

$$y = 0,8x \quad \rightarrow \text{ para os concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}); \quad \text{Eq. 5}$$

$$y = [0,8 - (f_{ck} - 50)/400] x \quad \rightarrow \text{ para os concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}).$$

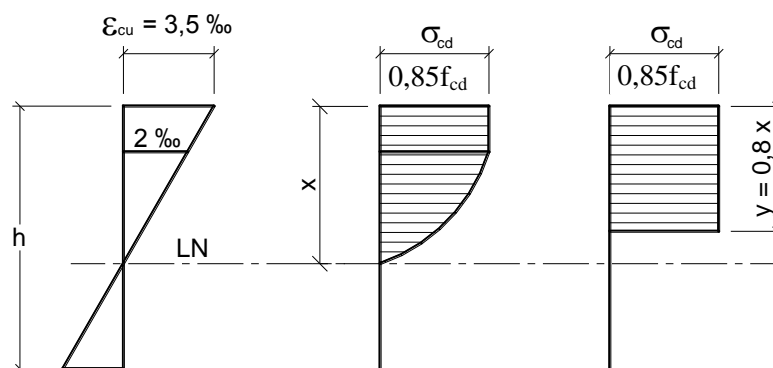


Figura 3 – Diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  parábola-retângulo e retangular simplificado para distribuição de tensões de compressão no concreto, para concretos do Grupo I de resistência ( $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ) e seção retangular.

No caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, **não** diminuir da linha neutra em direção à borda comprimida, a tensão é:

<sup>3</sup> O coeficiente 0,85 da tensão  $0,85f_{cd}$  deve ser corrigido conforme a Eq. 6 ou Eq. 7.

$$\sigma_{cd} = 0,85f_{cd} = \frac{0,85f_{ck}}{\gamma_c} \quad \rightarrow \text{ para os concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}); \quad \text{Eq. 6}$$

$$\sigma_{cd} = [1 - (f_{ck} - 50/200)]0,85f_{cd} \quad \rightarrow \text{ para os concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}).$$

Em caso contrário, isto é, quando a **seção diminui**, a tensão é:

$$\sigma_{cd} = 0,9 \cdot 0,85f_{cd} \quad \rightarrow \text{ para os concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}); \quad \text{Eq. 7}$$

$$\sigma_{cd} = 0,9[1 - (f_{ck} - 50/200)]0,85f_{cd} \quad \rightarrow \text{ para os concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}).$$

## 2.1 Diagrama Tensão-Deformação do Aço

A NBR 6118 (item 8.3.6) permite, para cálculo nos Estados-Limites de Serviço e Último, utilizar o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  simplificado mostrado na Figura 4, para aços com ou sem patamar de escoamento (aços encruados a frio). As deformações últimas ( $\varepsilon_u$ ) são limitadas a 10 ‰ (10 mm/m) para a tração (alongamento), e 3,5 ‰ para a compressão (encurtamento). A deformação de início de escoamento do aço ( $\varepsilon_{yd}$ ) é dada por:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad , \text{ com } \tan \alpha = E_s = 21.000 \text{ kN/cm}^2 = 210.000 \text{ MPa} \quad \text{Eq. 8}$$

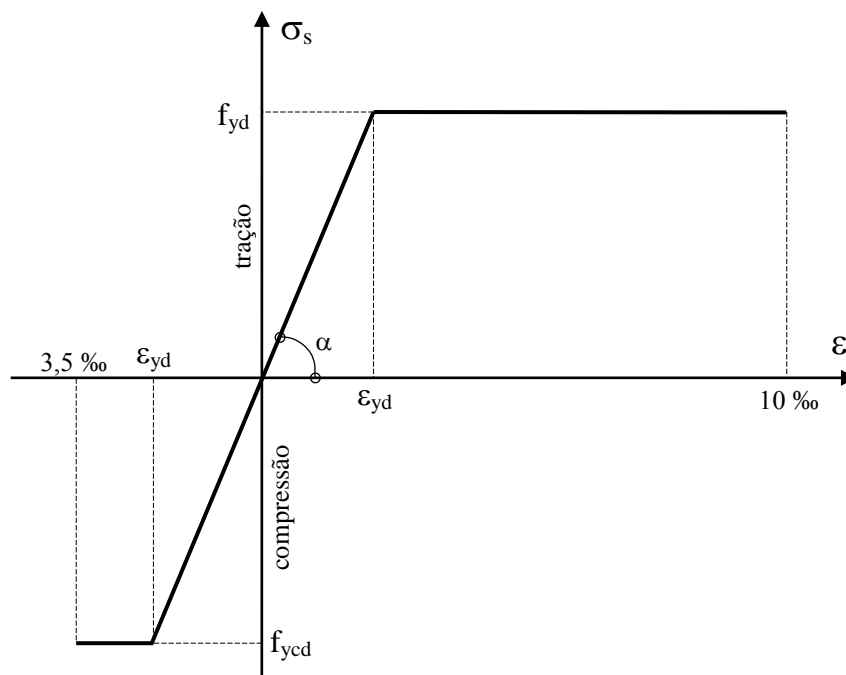


Figura 4 – Diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  para aços de armadura passiva.

A deformação de início de escoamento de cálculo ( $\varepsilon_{yd}$ ) é 1,04 ‰ para o aço CA-25, **2,07 ‰ para o CA-50** e 2,48 ‰ para o CA-60. Quaisquer deformações menores que a de início de escoamento resultam tensões menores que a máxima permitida ( $f_{yd}$ ), portanto, contra a economia, de modo que procura-se sempre aplicar a tensão máxima  $f_{yd}$ .

## 2.2 Solicitações Normais

### a) Tração e Compressão Simples

Na **tração e compressão simples**<sup>4</sup> a força normal  $N$  é aplicada no centro de gravidade (CG) da seção transversal, e a tensão normal de tração ou de compressão é constante em todos os pontos da seção

<sup>4</sup> Também recebem os nomes de centrada, uniforme ou axial.

transversal, isto é, a tensão é uniforme (Figura 5). A tração simples corresponde ao domínio **reta a** e a compressão simples à **reta b**.

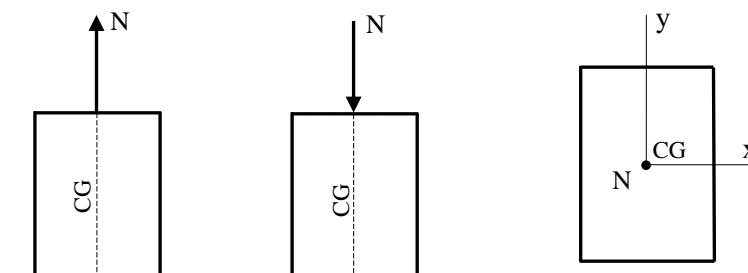


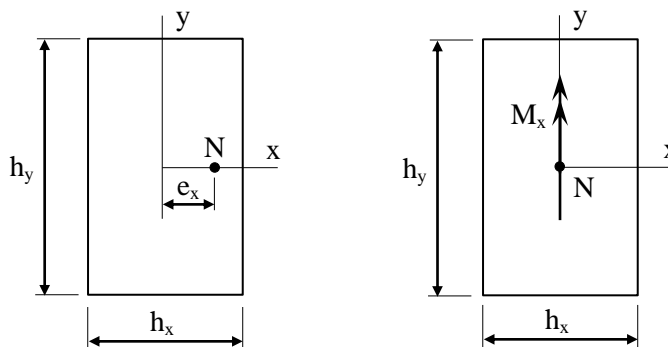
Figura 5 – Solicitações de tração e compressão simples.

## b) Flexão Composta

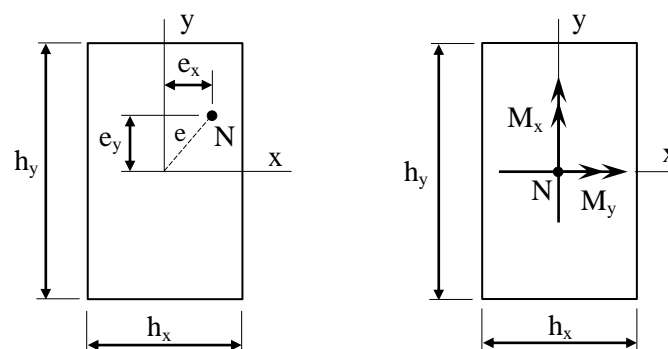
Na **flexão composta** ocorre a atuação conjunta de força normal ( $N$ ) e momento fletor ( $M$ ); para força de tração tem-se a **flexo-tração** e para compressão a **flexo-compressão**. Há dois casos (Figura 6):

- **Flexão Composta Normal** (ou Reta): além da força normal existe um momento fletor, em uma direção ( $M_x = e_x \cdot N$ ), como mostrado na Figura 6a;<sup>5</sup>

- **Flexão Composta Oblíqua**: além da força normal existem dois momentos fletores, relativos às duas direções principais da seção ( $M_x = e_x \cdot N$  e  $M_y = e_y \cdot N$ ), Figura 6b.



a) Flexão Composta Normal;



b) Flexão Composta Oblíqua.

Figura 6 – Tipos de flexão composta, explicitadas por meio da excentricidade da força normal e pelos momentos fletores.

<sup>5</sup> Neste texto, a notação utilizada para momento fletor, momento de inércia e índice de esbeltez, é relativa à direção da seção transversal ( $x$  ou  $y$ ), e não em torno de um eixo, o que em nada altera os resultados numéricos, pois é apenas uma questão relativa à convenção adotada. Basta trocar, por exemplo,  $M_x$  por  $M_y$ , e  $M_y$  por  $M_x$ .

Como será apresentado adiante, os pilares são classificados em função do tipo de solicitação a que é submetido: a) pilar intermediário (*Compressão Simples*); b) pilar de extremidade (*Flexão Composta Normal*); c) pilar de canto (*Flexão Composta Oblíqua*).

### 2.3 Domínios de Deformações

No item 17.2 a NBR 6118 “estabelece critérios para a determinação dos esforços resistentes das seções de vigas, pilares e tirantes, submetidas à força normal e momentos fletores.”, e apresenta os domínios de deformações (Figura 7). As deformações limites (ou últimas) são de 3,5 ‰ (para os concretos do Grupo I de resistência) para o encurtamento no concreto comprimido e 10 ‰ para o alongamento da armadura tracionada. Como 3,5 ‰ e 10 ‰ são valores últimos, diz-se que o “Estado-Limite Último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios.”

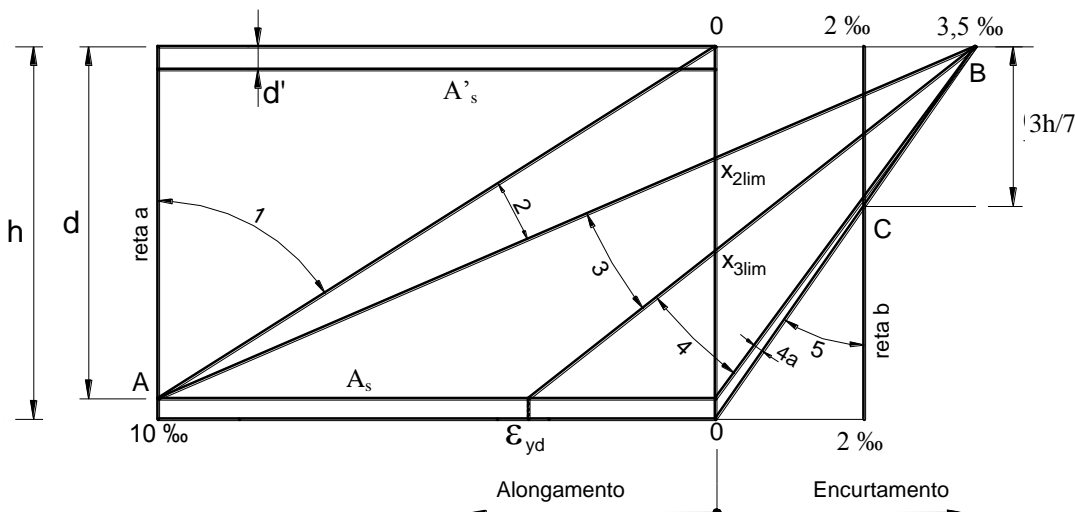


Figura 7 – Diagramas dos domínios de deformações (com deformações dos concretos do Grupo I).

Com os seguintes valores:

- a)  $x_{2lim} = 0,26d$ , e  $\beta_{x,2lim} = x/d = 0,26$  ( $x_{2lim}$  depende apenas da altura útil  $d$ );
- b) para os concretos do Grupo I e aço CA-50 tem-se:  $x_{3lim} = 0,63d$ , e  $\beta_{x,3lim} = 0,63$  ( $x_{3lim}$  depende do concreto e do aço).

#### 2.3.1 Reta a e Domínio 1

**Reta a** (Figura 8):

Solicitação: tração simples  
 Posição da LN:  $x = -\infty$   
 Duas armaduras tracionadas  $A_s$  e  $A'_s$  com deformação de alongamento  $\epsilon_s = \epsilon'_s = 10\text{‰}$ , e tensão  $\sigma_{sd} = \sigma'_s = f_{yd}$   
 Elemento: tirante

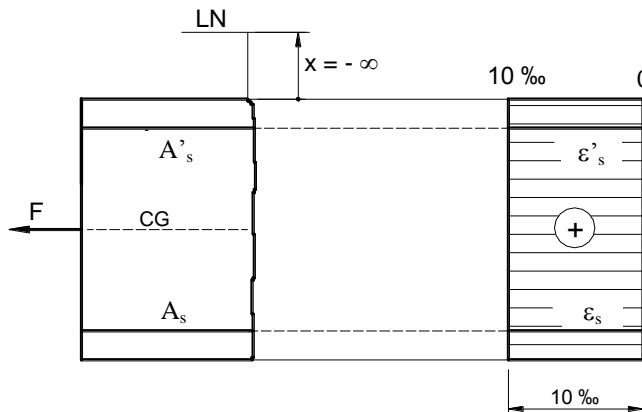


Figura 8 – Tração simples representada pela reta a.

**Domínio 1** (Figura 9).

Solicitação: flexo-tração com pequena excentricidade

Posição da LN:  $-\infty < x < 0$

Duas armaduras tracionadas ( $A_s$  e  $A'_s$ ).

Deformação de alongamento na armadura mais tracionada fixa  $\varepsilon_s = 10\text{‰}$ .

Elemento: tirante

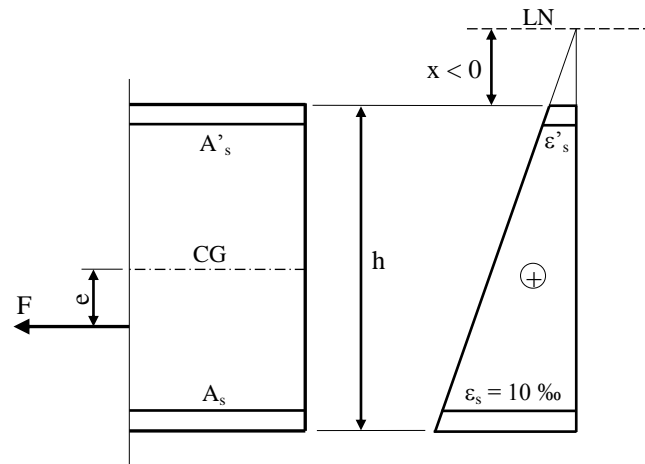


Figura 9 – Tração não uniforme no domínio 1.

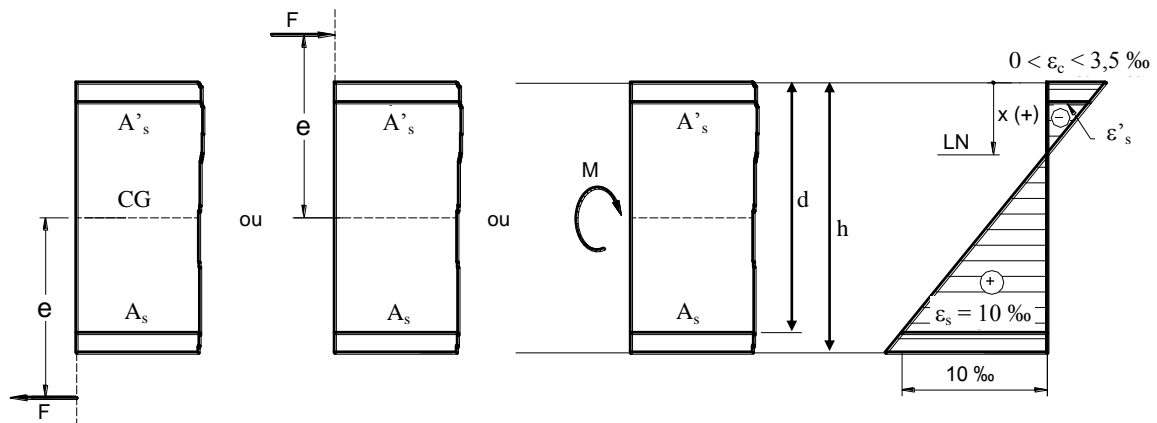
**2.3.2 Domínio 2**

Figura 10 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 2.

Solicitação: flexão simples e flexo-tração ou flexo-compressão com grande excentricidade (Figura 10)

Posição da LN:  $0 < x < x_{2lim}$

Uma armadura tracionada ( $A_s$ ) e outra comprimida ( $A'_s$ ). Deformação na armadura tracionada fixa  $\varepsilon_s = 10\text{‰}$ . Deformação de encurtamento na fibra mais comprimida de concreto  $0 < \varepsilon_c < 3,5\text{‰}$ . O domínio 2 pode ser subdividido em **2a** e **2b** em função da deformação na borda comprimida, com  $0 < \varepsilon_c < 2\text{‰}$  para o subdomínio **2a** (e  $\beta_{x2a,lim} = x_{2a,lim}/d = 0,167$ ), e  $2 < \varepsilon_c < 3,5\text{‰}$  para o subdomínio **2b** (Figura 11).

Elemento: viga, laje e pilar

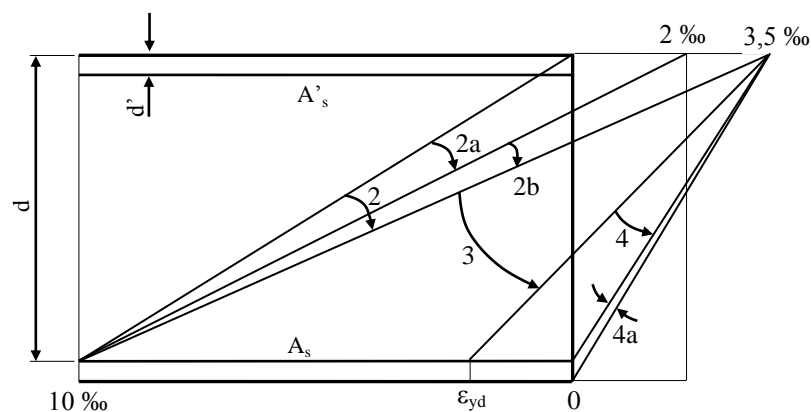


Figura 11 – Domínio 2 e subdomínios 2a e 2b.

No subdomínio **2a** a deformação na armadura comprimida ( $A'_s$ ) é muito pequena e pode ser ignorada (Figura 12). O subdomínio **2b** demarca a posição da LN em que a armadura comprimida passa a ser eficiente (Fusco, 1981).<sup>6</sup>

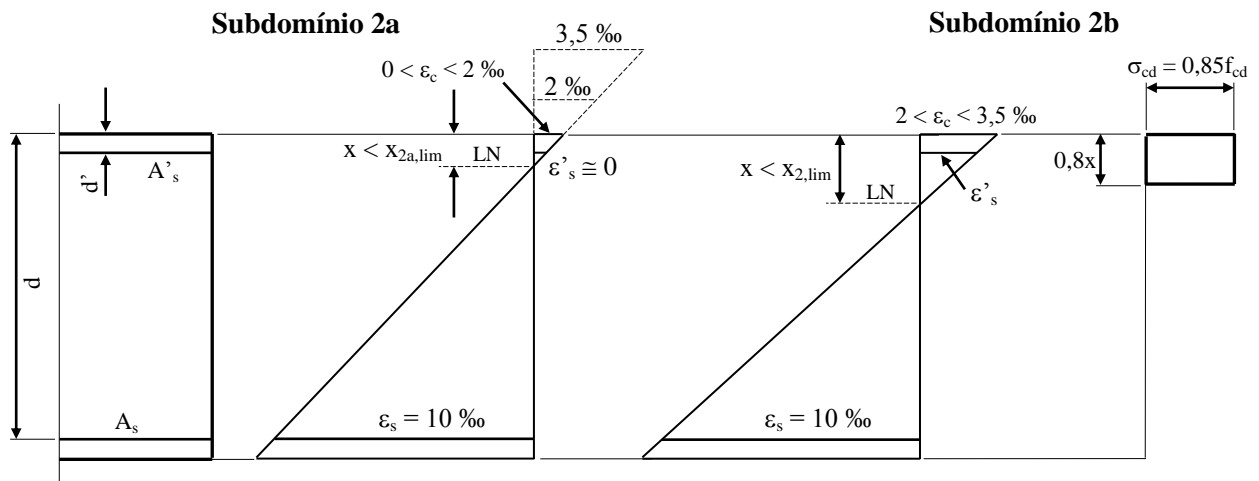


Figura 12 – Deformações nos subdomínios 2a e 2b.

### 2.3.3 Domínio 3

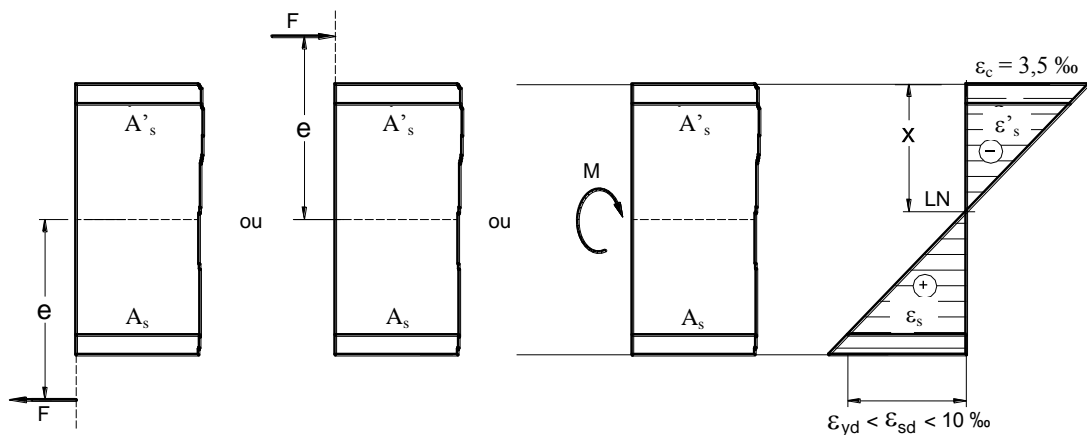


Figura 13 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 3.

Solicitação: flexão simples e flexo-tração ou flexo-compressão com grande excentricidade (Figura 13)

Posição da LN:  $x_{2lim} < x < x_{3lim}$

Uma armadura tracionada ( $A_s$ ) e outra comprimida ( $A'_s$ ). Deformação de encurtamento fixa  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$  no concreto da borda comprimida. Deformação na armadura tracionada  $\epsilon_{yd} < \epsilon_s < 10 \text{ ‰}$  e tensão  $\sigma_{sd} = f_{yd}$

Elemento: viga, laje e pilar.

<sup>6</sup> Outro aspecto é que no subdomínio **2b** já existe alguma plastificação do concreto por microfissuração interna do concreto comprimido, ainda não iniciada no subdomínio **2a**.

### 2.3.4 Domínio 4

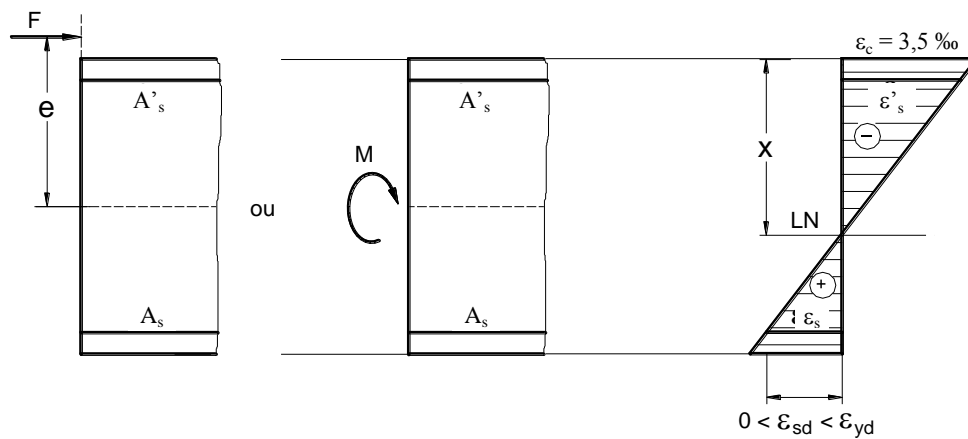


Figura 14 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 4.

Solicitação: flexão simples e flexo-compressão com grande excentricidade (Figura 14)

Posição da LN:  $x_{3lim} < x < d$

Uma armadura traçoadora ( $A_s$ ) e outra comprimida ( $A'_s$ ). Deformação no concreto da borda comprimida fixa  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ . Deformação na armadura traçoadora  $0 < \epsilon_s < \epsilon_{yd}$  (contra a economia)

Elemento: viga, laje e pilar

### 2.3.5 Domínio 4a

Solicitação: flexo-compressão com pequena excentricidade (Figura 15)

Posição da LN:  $d < x < h$  (passa no cobrimento da armadura menos comprimida  $A_s$ )

Duas armaduras comprimidas ( $A_s$  e  $A'_s$ ), com tensão  $\sigma_{sd} \cong 0$  na armadura  $A_s$ . Deformação no concreto da borda comprimida fixa  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ .

Elemento: pilar

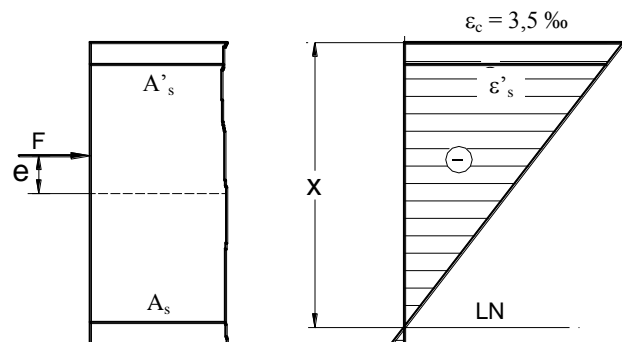


Figura 15 – Solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 4a.

### 2.3.6 Domínio 5 e Reta b

**Domínio 5** (Figura 16):

Solicitação: flexo-compressão com pequena excentricidade

Posição da LN:  $h < x < +\infty$  (fora da seção transversal)

Duas armaduras comprimidas ( $A_s$  e  $A'_s$ ).  
Caracterizado pelo ponto C a  $3h/7$ .  
Deformações no concreto em função da posição da LN: na borda mais comprimida  $2 < \varepsilon_c < 3,5$  ‰; na borda menos comprimida  $0 < \varepsilon_c < 2$  ‰

Elemento: pilar

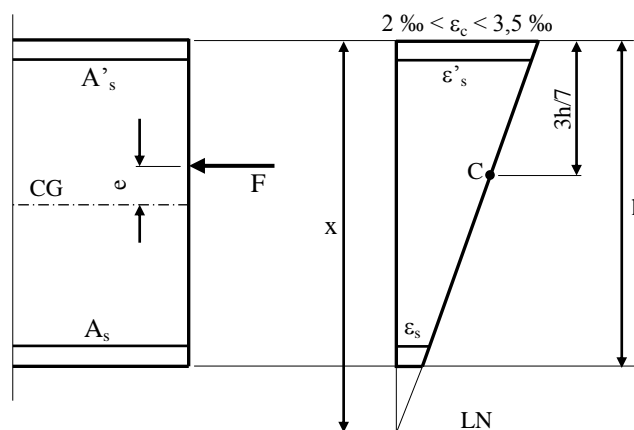


Figura 16 – Compressão não uniforme no domínio 5.

**Reta b** (Figura 17):

Solicitação: compressão simples

Posição da LN:  $x = +\infty$

Duas armaduras comprimidas ( $A_s$  e  $A'_s$ ).  
Seção transversal inteiramente comprimida,  
deformações  $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon'_s = 2$  ‰, e tensões

$$\sigma_{sd} = \sigma'_{sd}$$

Elemento: pilar

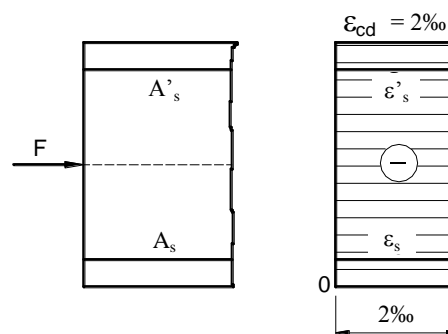


Figura 17 – Compressão simples na reta b.

## 2.4 Hipóteses Básicas

As hipóteses básicas consideradas no dimensionamento de vigas à *Flexão Simples* são também consideradas na FCN, como: a seção permanece plana após a deformação, existe aderência entre o aço e o concreto, a resistência do concreto à tração é desprezada, o diagrama *retangular simplificado* com altura  $y$  pode ser adotado para a distribuição de tensões de compressão no concreto (Figura 3), a tensão no aço pode ser obtida com o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  (Figura 4), e o Estado-Limite Último é caracterizado em um dos domínios de deformações (Figura 7).

## 3. FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

Na *Flexão Composta Normal* (FCN) atuam os esforços solicitantes momento fletor ( $M$ ) e força normal ( $N$ ), com a flexão em torno de um eixo principal de inércia da seção (ver Figura 6a).

Neste estudo são apresentadas as equações para dimensionamento de peças submetidas à força normal de **tração** e de **compressão**, com casos que abrangem todos os domínios de deformações, da **reta a** à **reta b**. São equações aplicadas no dimensionamento de tirantes, pilares, vigas e lajes.<sup>7</sup> Aqui será estudada apenas a

<sup>7</sup> Este texto toma como base os seguintes autores: Pinheiro (1994), Fusco (1981) e Santos (1983).

seção retangular, com armaduras distribuídas em duas faces opostas ( $A_s$  e  $A'_s$ ).<sup>8</sup> A divisão do estudo é feita do seguinte modo:<sup>9</sup>

- tração simples e flexo-tração com pequena excentricidade (duas armaduras tracionadas);
- flexo-tração e flexo-compressão com grande excentricidade (uma armadura tracionada e outra comprimida);
- flexo-compressão com pequena excentricidade (duas armaduras comprimidas).

### 3.1 Tração Simples e Flexo-Tração com Pequena Excentricidade

Na *tração simples* e na *flexo-tração com pequena excentricidade* o esforço solicitante predominante é a força normal ( $N$ ). Como o momento fletor ( $M$ ) é de pequena intensidade, as duas armaduras são tracionadas ( $A_s$  e  $A'_s$ ).<sup>10</sup> A seção transversal encontra-se inteiramente tracionada e fissurada, e não existe contribuição do concreto. O Estado-Limite Último (ELU) é caracterizado pela deformação plástica de 10 ‰ na armadura mais tracionada ( $A_s$ ), Figura 18.

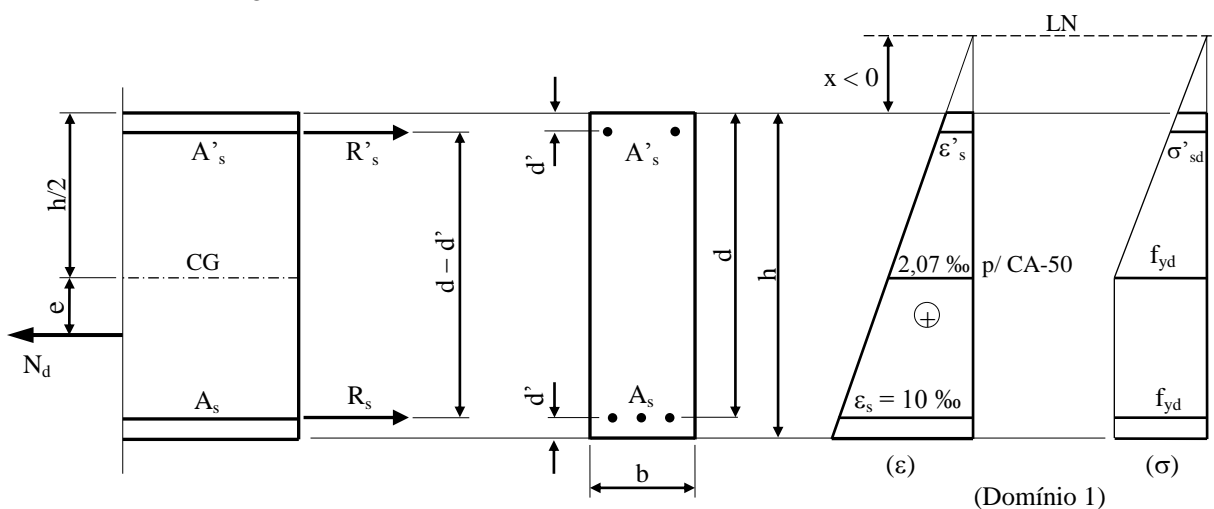


Figura 18 – FCN em tirante de seção retangular com duas armaduras tracionadas (domínio 1).

A armadura  $A'_s$  estará tracionada com a linha neutra (LN) posicionada até o cobrimento  $d'$ , portanto, no intervalo  $-\infty < x < d'$ . Fazendo  $\beta_x = x/d^{(11)}$  tem-se:  $-\infty < \beta_x < d'/d$ . Os domínios possíveis são a **reta a**, 1 e 2a' (quando  $0 < x < d'$ ). A tensão na armadura mais tracionada ( $A_s$ ) é  $\sigma_{sd} = f_{yd}$ . Para a solução dos problemas existem infinitas soluções, no entanto, como solução econômica procura-se fazer  $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$ , e conseqüentemente  $\sigma'_{sd} = f_{yd}$ . A posição da LN fica então determinada com  $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon'_s$ , conforme mostrado na Figura 18.

As equações surgem da análise de equilíbrio das forças normais que ocorrem na seção. Com o somatório de forças normais tem-se:

$$N_d = R_s + R'_s \quad , \text{ e como } R_s = A_s f_{yd} \quad \text{e} \quad R'_s = A'_s \sigma'_{sd} :$$

$$N_d = A_s f_{yd} + A'_s \sigma'_{sd} \tag{Eq. 9}$$

Fazendo somatório de momentos fletores em  $h/2$  tem-se:

<sup>8</sup> De modo geral, a armadura  $A_s$  representa a armadura tracionada, e  $A'_s$  a armadura comprimida. No entanto, dependendo do caso de solicitação,  $A_s$  pode representar a armadura menos comprimida, e  $A'_s$  a menos tracionada, como será apresentado nos três diferentes casos de solicitação.

<sup>9</sup> Santos (1983, p.502) apresenta que os processos mais frequentes na literatura técnica internacional dividem a FCN em três partes:

- tração simples e flexo-tração com pequena excentricidade (domínio 1);
- flexão simples e flexão composta com grande excentricidade (domínios 2, 3 e 4);
- flexo-compressão com pequena excentricidade (domínios 4a e 5).

Essa divisão é seguida de modo semelhante por Fusco (1981).

<sup>10</sup> A notação  $A'_s$  indica a armadura menos tracionada.

<sup>11</sup> Neste caso, a posição  $x$  da LN é a distância entre a fibra menos tracionada e a LN, e  $d$  é a distância entre a fibra menos tracionada e o CG da armadura mais tracionada ( $A_s$ ).

$$N_d e + R'_s (h/2 - d') - R_s (h/2 - d') = 0 \quad , \text{ e como } N_d e = M_d \text{ , substituindo } R_s \text{ e } R'_s :$$

$$M_d = (A_s f_{yd} - A'_s \sigma'_{sd}) \cdot (h/2 - d') \quad \text{Eq. 10}$$

Com semelhança de triângulos é definida a equação de compatibilidade de deformações:

$$\frac{\varepsilon'_s}{d' - x} = \frac{\varepsilon_s}{d - x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_s = \varepsilon_s \frac{d' - x}{d - x} \quad \text{Eq. 11}$$

### 3.1.1 Exemplo

Calcular as armaduras  $A_s$  e  $A'_s$  para uma seção transversal retangular submetida à flexo-tração, com força normal  $N_k = 1.000$  kN e momento fletor  $M_k = 10.000$  kN.cm. Considerar: concreto C35 ; aço CA-50 ( $f_{yd} = 43,5$  kN/cm<sup>2</sup>) ; seção retangular  $b = 25$  cm e  $h = 80$  cm ;  $d = 76$  cm ;  $d' = 4$  cm ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$  (Figura 19).

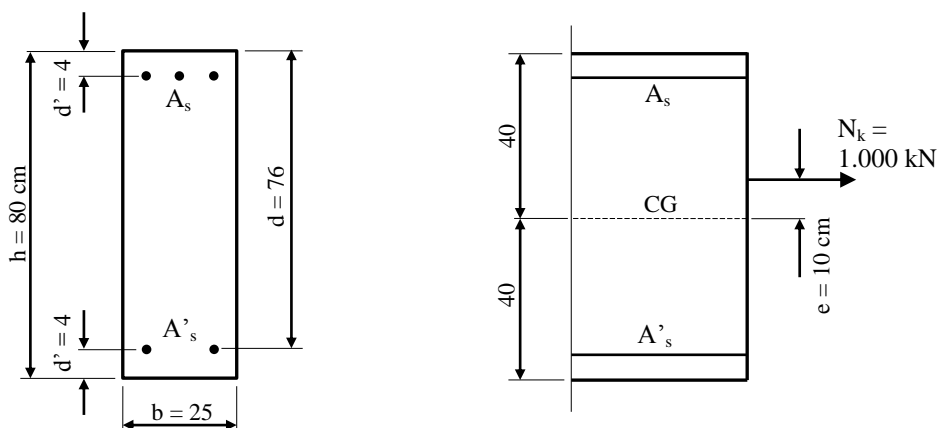


Figura 19 – Flexo-tração com pequena excentricidade em seção retangular.

### Resolução

A excentricidade da força normal é:  $e = M_k / N_k = 10.000 / 1.000 = 10,0$  cm, pequena relativamente à altura da peça, e o problema é de dimensionamento de **tirante** sob *flexo-tração com pequena excentricidade*,<sup>12</sup> com duas armaduras tracionadas. LN no intervalo  $-\infty < x < d'$  (domínio 1 - ver Figura 9, ou subdomínio 2a'),<sup>13</sup> e infinitas soluções caso não se fixe a posição  $x$  da LN. A deformação na armadura mais tracionada  $A_s$  é  $\varepsilon_s = 10$  ‰ (Figura 20), e tensão  $\sigma_{sd} = f_{yd} = 435$  MPa, de modo que a solução econômica é aplicar na armadura menos tracionada também a máxima tensão que o aço pode resistir:  $\sigma'_{sd} = f_{yd} = 435$  MPa, ou seja,  $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$  ( $\geq 2,07$  ‰ para o aço CA-50, ver Figura 4).

Posição da LN com  $\varepsilon'_s = 2,07$  ‰ e  $\varepsilon_s = 10$  ‰ (Eq. 11):

$$\frac{\varepsilon'_s}{d' - x} = \frac{\varepsilon_s}{d - x} \quad \rightarrow \quad \frac{2,07}{4 - x} = \frac{10}{76 - x} \quad \rightarrow \quad x = -14,79 \text{ cm}$$

Equacionamento para cálculo das armaduras (Eq. 9 e Eq. 10), com  $\gamma_f = 1,4$ :

$$N_d = A_s f_{yd} + A'_s \sigma'_{sd}$$

$$M_d = (A_s f_{yd} - A'_s \sigma'_{sd}) \cdot (h/2 - d')$$

<sup>12</sup> Esta hipótese estará correta se resultar o domínio 1 ou subdomínio 2a'.

<sup>13</sup> No domínio 1 a LN encontra-se no intervalo  $-\infty < x < 0$ , e no subdomínio 2a' está no intervalo  $0 < x < d'$ , ou seja, encontra-se passando no cobrimento da armadura  $A'_s$ .

$$\begin{cases} 1,4 \cdot 1000 = A_s \cdot 43,5 + A'_s \cdot 43,5 \\ 1,4 \cdot 10.000 = (A_s \cdot 43,5 - A'_s \cdot 43,5) \left( \frac{80}{2} - 4 \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_s + A'_s = 32,18 \\ A_s - A'_s = 8,94 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_s = 20,56 \text{ cm}^2 \\ A'_s = 11,62 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

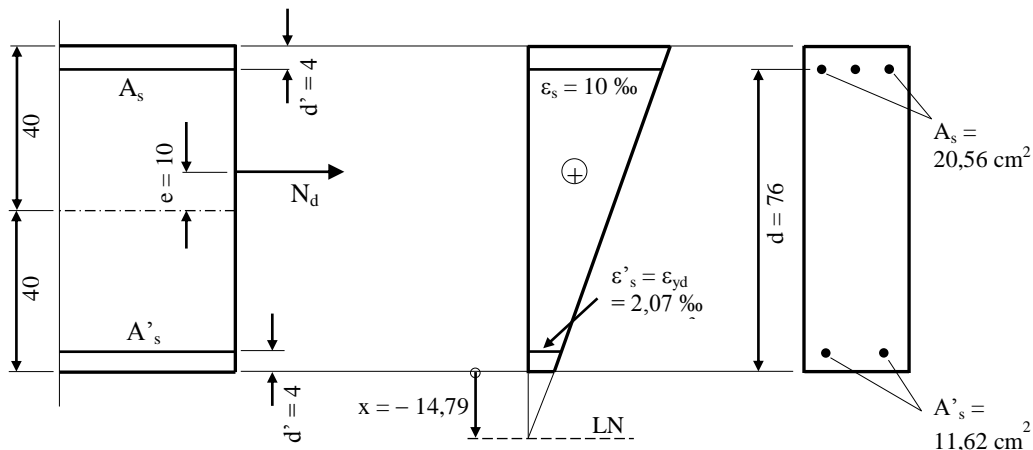


Figura 20 – Solução numérica adotada para o tirante.

Comparando com o **valor absoluto** de  $x$  para a LN ( $-14,79$  cm), valores menores proporcionam armaduras  $A'_s$  maiores que a calculada, pois resultam deformações  $\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd}$ , e valores maiores para  $x$  não alteram a armadura  $A'_s$ , pois resultam sempre tensões  $\sigma'_{sd} = f_{yd}$ , correspondente ao trecho de plastificação do aço (Figura 4).<sup>14</sup>

### 3.2 Flexo-Compressão e Flexo-Tração com Grande Excentricidade

Na *flexão composta com grande excentricidade* a força normal ( $N$ ) é de baixa intensidade e o esforço predominante é o momento fletor ( $M$ ), o que resulta uma armadura tracionada ( $A_s$ ) e outra comprimida ( $A'_s$ ), Figura 21 e Figura 22. Os casos de solicitação são a *flexo-tração* e *flexo-compressão com grande excentricidade*. Os domínios de ocorrência são 3, 4, e o  $2b'$  (aquele com  $d' < x < x_{2lim}$ ).<sup>15</sup>

A linha neutra (LN) encontra-se dentro da seção transversal, entre as armaduras, no intervalo entre  $d' < x < d$  (ou  $d'/d < \beta_x < 1$ ). O ELU é caracterizado pela deformação de alongamento no aço de 10‰ no subdomínio  $2b'$ , e pela deformação de encurtamento no concreto de 3,5‰ nos domínios 3 e 4.

O problema é indeterminado e admite infinitas soluções (infinitos valores possíveis para  $x$ ), uma vez que existem duas equações de equilíbrio e três incógnitas (geralmente  $x$ ,  $A_s$  e  $A'_s$ ). A solução mais econômica é adotar  $x$  no limite entre os domínios 3 e 4 ( $x = x_{3lim}$ , ou  $\beta_{x,3lim}$ ), o que corresponde à deformação de início de escoamento ( $\varepsilon_{yd}$ ) na armadura tracionada ( $A_s$ ) e o máximo encurtamento no concreto ( $\varepsilon_c = 3,5$ ‰). No entanto, no caso de **vigas e lajes**<sup>16</sup> deve também ser analisada a relação entre a posição  $x$  da linha neutra e a altura útil  $d$ , pois a NBR 6118 (item 14.6.4.3) apresenta limites para condições de ductilidade, afirmando que “a capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for  $x/d$ , tanto maior será essa capacidade”. E para “proporcionar o adequado comportamento dúctil em vigas e lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

$$a) \ x/d \leq 0,45 \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa (Grupo I);}$$

Eq. 12

$$b) \ x/d \leq 0,35 \text{ para concretos com } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa (Grupo II).}$$

“Esses limites podem ser alterados se forem utilizados detalhes especiais de armaduras, como, por exemplo, os que produzem confinamento nessas regiões.”

As equações de equilíbrio são divididas conforme a força normal seja de compressão ou de tração, conforme mostrado a seguir.

<sup>14</sup> Em Fusco (1981) e Santos (1983) são encontrados outros exemplos resolvidos, bem como equações adimensionais.

<sup>15</sup> A divisão do domínio 2 nos subdomínios  $2a'$  e  $2b'$  tem a finalidade de separar os casos de duas armaduras tracionadas ( $2a'$ ) e uma comprimida e outra tracionada ( $2b'$ ).

<sup>16</sup> O limite  $x/d$  não é imposto aos pilares.

### 3.2.1 Flexo-Compressão

Conforme o equilíbrio das forças normais mostradas na Figura 21 tem-se:

$$N_d = R_c + R'_s - R_s$$

Resultante de compressão no concreto:

$$R_c = b \cdot 0,8x \cdot 0,85f_{cd} = 0,68b \cdot x \cdot f_{cd}$$

$$N_d = 0,68b \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 13}$$

Substituindo  $x = d \beta_x$ :

$$N_d = 0,68b \cdot d \beta_x \cdot f_{cd} + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 14}$$

Fazendo somatório de momentos fletores em  $h/2$  tem-se:

$$N_d \cdot e = R_c (h/2 - 0,4x) + R_s (h/2 - d') + R'_s (h/2 - d')$$

e substituindo  $R_c$ ,  $R_s$  e  $R'_s$  e  $N_d \cdot e = M_d$ :

$$M_d = 0,68b \cdot x \cdot f_{cd} (h/2 - 0,4x) + (A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 15}$$

Substituindo  $x = \beta_x d$  e alterando a equação fica:

$$M_d = 0,34b \cdot d^2 \beta_x \cdot f_{cd} (h/d - 0,8\beta_x) + (A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 16}$$

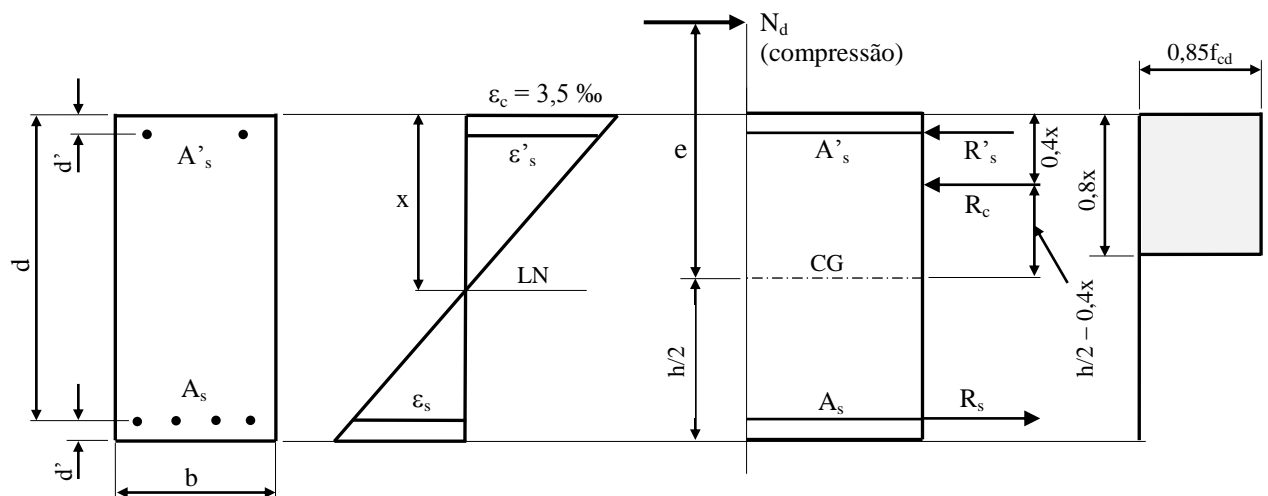


Figura 21 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular no domínio 3 ou 4.

### 3.2.2 Flexo-Tração

Na flexo-tração basta substituir  $N_d$  por  $(-N_d)$  na Eq. 13 (ou Eq. 14), e não há alteração na Eq. 15 (ou Eq. 16), ou conforme a Figura 22:

$$-N_d = R_c + R'_s - R_s$$

$$-N_d = 0,68b \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 17}$$

$$-N_d = 0,68b \cdot d \beta_x \cdot f_{cd} + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd} \quad \text{Eq. 18}$$

$$M_d = 0,68b \times f_{cd} (h/2 - 0,4x) + (A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 19}$$

$$M_d = 0,34b d^2 \beta_x f_{cd} (h/d - 0,8\beta_x) + (A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 20}$$

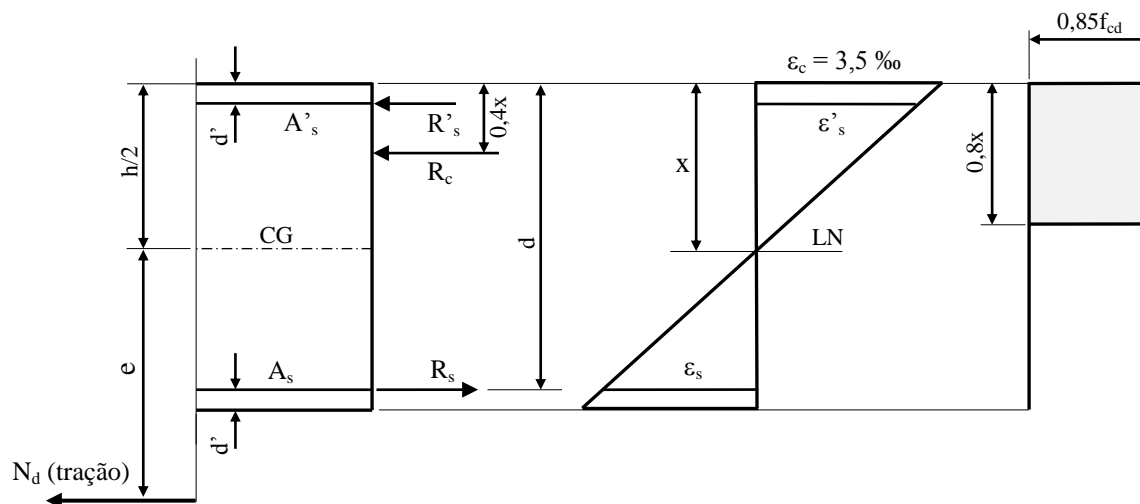


Figura 22 – Flexo-tração com grande excentricidade em seção retangular no domínio 3 ou 4.

### 3.2.3 Equações de Compatibilidade

As equações de compatibilidade para os domínios 2b', 3 e 4 são:

$$\frac{\epsilon_s}{d-x} = \frac{\epsilon'_s}{x-d'} = \frac{\epsilon_c}{x} \quad \text{Eq. 21}$$

$$\frac{\epsilon_s}{1-\beta_x} = \frac{\epsilon'_s}{\beta_x - \frac{d'}{d}} = \frac{\epsilon_c}{\beta_x} \quad \text{Eq. 22}$$

com  $\epsilon_s = 10 \text{‰}$  para o subdomínio 2b' e  $\epsilon_c = 3,5 \text{‰}$  para os domínios 3 e 4.

A Tabela 1 resume as equações de compatibilidade para a *Flexão Composta com Grande Excentricidade*.

Tabela 1 – Resumo de equações para a Flexão Composta com Grande Excentricidade.  
(Fonte: Adaptada de Fusco, 1981).

Domínio	Variáveis impostas pelo domínio	Variáveis calculadas a partir do valor de x (ou $\beta_x$ )	Variáveis determinadas a partir das anteriores
<b>2b'</b> $d' < x < 0,26d$ ou $d'/d < \beta_x < 0,26$	$\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$ $\sigma_{sd} = f_{yd}$	$\varepsilon'_s = \varepsilon_s \frac{x-d'}{d-x} = 10 \frac{x-d'}{d-x}$ $\varepsilon'_s = \varepsilon_s \frac{\beta_x - d'/d}{1-\beta_x} = 10 \frac{\beta_x - d'/d}{1-\beta_x}$	$\sigma'_{sd}$
<b>3</b> $0,26d < x < 0,63d$ ou $0,26 < \beta_x < 0,63$	$\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$	$\varepsilon_s = \varepsilon_c \frac{d-x}{x} = 3,5 \frac{d-x}{x}$ $\varepsilon_s = \varepsilon_c \frac{1-\beta_x}{\beta_x} = 3,5 \frac{1-\beta_x}{\beta_x}$	$\sigma_{sd} = f_{yd}$
		$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \frac{x-d'}{x} = 3,5 \frac{x-d'}{x}$ $\varepsilon'_s = \varepsilon_c \frac{\beta_x - d'/d}{\beta_x} = 3,5 \frac{\beta_x - d'/d}{\beta_x}$	$\sigma'_{sd}$
<b>4</b> $0,63d < x < d$ ou $0,63 < \beta_x < 1,0$	$\sigma_{cd} = 0,85f_{cd}$	$\varepsilon_s = \varepsilon_c \frac{d-x}{x} = 3,5 \frac{d-x}{x}$ $\varepsilon_s = \varepsilon_c \frac{1-\beta_x}{\beta_x} = 3,5 \frac{1-\beta_x}{\beta_x}$	$\sigma_{sd} < f_{yd}$
		$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \frac{x-d'}{x} = 3,5 \frac{x-d'}{x}$ $\varepsilon'_s = \varepsilon_c \frac{\beta_x - d'/d}{\beta_x} = 3,5 \frac{\beta_x - d'/d}{\beta_x}$	$\sigma'_{sd}$

### 3.2.4 Exemplo 1

Calcular as armaduras  $A_s$  e  $A'_s$  para uma seção transversal retangular submetida à **flexo-compressão**, com força normal de compressão  $N_d = 2.000 \text{ kN}$  e momento fletor  $M_d = 100.000 \text{ kN.cm}$ . São conhecidos: concreto C30 ; aço CA-50 ( $f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ ) ; seção retangular  $b = 25 \text{ cm}$  e  $h = 80 \text{ cm}$  ;  $d = 76 \text{ cm}$  ;  $d' = 4 \text{ cm}$  ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$  (Figura 23).

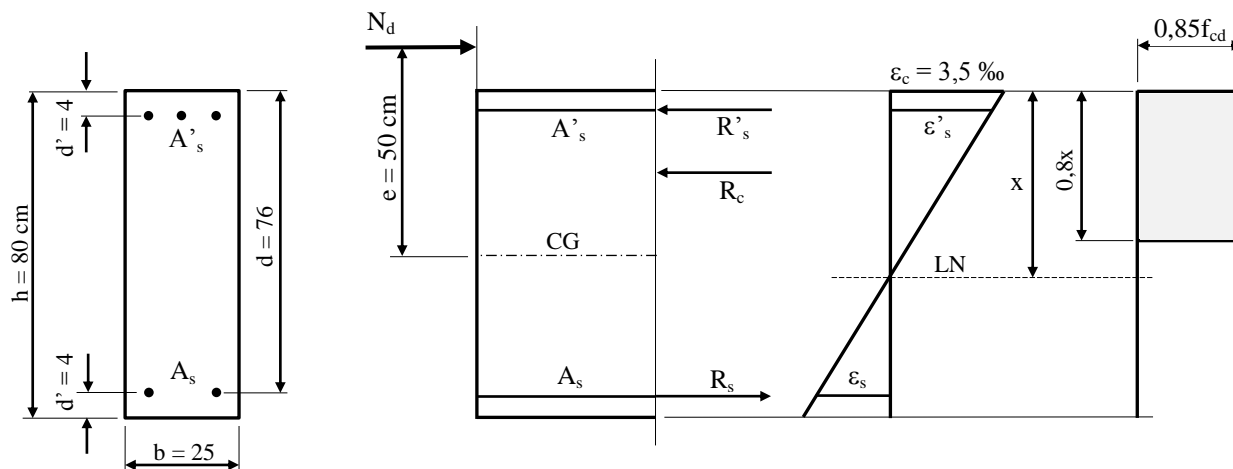


Figura 23 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular, nos domínios 3 e 4.

### Resolução

A excentricidade da força normal é:  $e = M_d / N_d = 100.000/2.000 = 50,0$  cm, grande relativamente à altura da peça, e o problema é de *flexo-compressão com grande excentricidade*, com momento fletor preponderante. O problema admite infinitas soluções, em função da posição  $x$  adotada para a LN, com uma armadura comprimida e outra tracionada. A posição da LN é  $d' < x < d$ , nos domínios 2b', 3 e 4, sendo o 3 o domínio econômico. Assim, uma solução econômica é com a LN no limite entre os domínios 3 e 4:

$x = x_{3lim}$ , com  $\varepsilon_c = 3,5$  ‰,  $\varepsilon_s = \varepsilon_{yd} = 2,07$  ‰ e  $\sigma_{sd} = f_{yd} = 43,5$  kN/cm<sup>2</sup> (para o aço CA-50). Portanto:

$$x_{3lim} = 0,63d = 0,63 \cdot 76 = 47,88 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \beta_x = \beta_{x,3lim} = 0,63$$

As deformações nas armaduras, com  $\varepsilon_c = 3,5$  ‰, são (Eq. 21 ou Eq. 22):

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon'_s}{47,88-4} = \frac{3,5}{47,88} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_s = 3,21 \text{ ‰} \quad (\text{armadura comprimida})$$

$\varepsilon'_s = 3,21$  ‰  $>$   $\varepsilon_{yd} = 2,07$  ‰, de modo que  $\sigma'_{sd} = f_{yd} = 43,5$  kN/cm<sup>2</sup>. E apenas como comprovação:

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon_s}{76-47,88} = \frac{3,5}{47,88} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = 2,07 \text{ ‰} \quad (\text{armadura tracionada})$$

Equações para a flexo-compressão (Eq. 14 e Eq. 16):

$$N_d = 0,68b d \beta_x f_{cd} + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}$$

$$M_d = 0,34b d^2 \beta_x f_{cd} (h/d - 0,8\beta_x) + (A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d')$$

Substituindo as variáveis pelos valores numéricos:

$$\begin{cases} 2.000 = 0,68 \cdot 25 \cdot 76 \cdot 0,63 \frac{3,0}{1,4} + A'_s 43,5 - A_s 43,5 \\ 100.000 = 0,34 \cdot 25 \cdot 76^2 \cdot 0,63 \frac{3,0}{1,4} \left( \frac{80}{76} - 0,8 \cdot 0,63 \right) + (A_s 43,5 + A'_s 43,5) \left( \frac{80}{2} - 4 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'_s - A_s = 5,88 \\ A'_s + A_s = 40,64 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A_s = 17,38 \text{ cm}^2 & (\text{armadura tracionada}) \\ A'_s = 23,26 \text{ cm}^2 & (\text{armadura comprimida}) \end{cases}$$

Outras soluções também econômicas são possíveis com diferentes valores para  $x$  no domínio 3, e que proporcionam outros pares de armadura  $A_s$  e  $A'_s$ .<sup>17</sup>

### 3.2.5 Exemplo 2

Calcular as armaduras  $A_s$  e  $A'_s$  da peça do exemplo de Fusco (1981, p.57), de seção retangular submetida à flexo-compressão, com força normal de compressão  $N_k = 500$  kN e excentricidade  $e = 80$  cm. São conhecidos: concreto C25 ; aço CA-50 ( $f_{yd} = 43,5$  kN/cm<sup>2</sup>) ;  $b = 25$  cm ;  $h = 70$  cm ;  $d = 65$  cm ;  $d' = 5$  cm ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$  (Figura 24).

<sup>17</sup> Com a LN  $x = x_{2lim} = 0,26d = 19,76$  cm, as armaduras resultam  $A_s = 9,84$  cm<sup>2</sup> e  $A'_s = 39,27$  cm<sup>2</sup>, o que representa um acréscimo de 8,5 cm<sup>2</sup> de armadura relativamente aos resultados com  $x = x_{3lim}$ . No equilíbrio de forças, a armadura  $A'_s$  e o concreto comprimido se contrapõem à força  $N_d$  e à armadura  $A_s$ , e o aumento da armadura  $A'_s$  ocorre porque a diminuição de  $x$  acarreta uma menor contribuição do concreto comprimido.

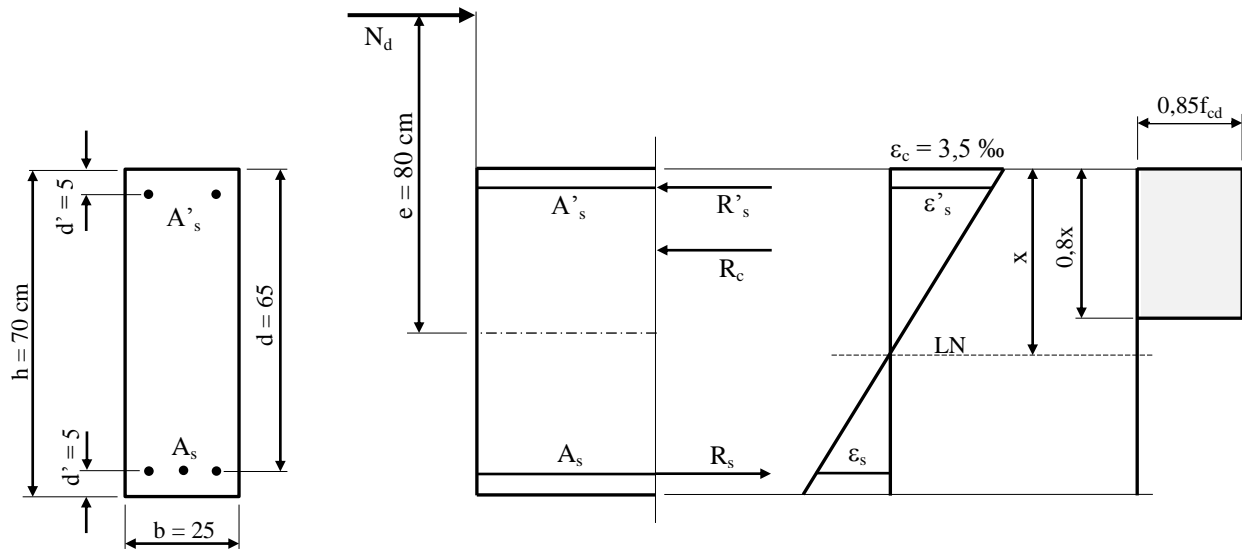


Figura 24 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular, nos domínios 3 e 4.

### Resolução

O momento fletor atuante é:  $M_k = N_k e = 500 \cdot 80 = 40.000 \text{ kN.cm}$ . A excentricidade é grande relativamente à altura da peça, e o problema é de *flexo-compressão com grande excentricidade*, com momento fletor preponderante. Como uma solução econômica será adotada a LN no domínio 3,<sup>18</sup> com  $\beta_x = 0,615$ , e:

$$x = \beta_x d = 0,615 \cdot 65 = 39,98 \text{ cm} \cong 40,0 \text{ cm}$$

As deformações nas armaduras, com  $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ , são (Eq. 21 ou Eq. 22):

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon_s}{65-40,0} = \frac{3,5}{40,0} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = 2,19 \text{ ‰} \quad (\text{armadura tracionada})$$

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon'_s}{40,0-5} = \frac{3,5}{40,0} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_s = 3,06 \text{ ‰} \quad (\text{armadura comprimida})$$

$$\varepsilon_s = 2,19 \text{ ‰} > \varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰} \quad \text{e} \quad \varepsilon'_s = 3,06 \text{ ‰} > \varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰} \quad \rightarrow \quad \sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

Equações para a flexo-compressão (Eq. 14 e Eq. 16):

$$N_d = 0,68b d \beta_x f_{cd} + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}$$

$$M_d = 0,34b d^2 \beta_x f_{cd} (h/d - 0,8\beta_x) + (A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d')$$

Substituindo as variáveis pelos valores numéricos:

$$\begin{cases} 1,4 \cdot 500 = 0,68 \cdot 25 \cdot 65 \cdot 0,615 \frac{2,5}{1,4} + A'_s 43,5 - A_s 43,5 \\ 1,4 \cdot 40000 = 0,34 \cdot 25 \cdot 65^2 \cdot 0,615 \frac{2,5}{1,4} \left( \frac{70}{65} - 0,8 \cdot 0,615 \right) + (A_s 43,5 + A'_s 43,5) \left( \frac{70}{2} - 5 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'_s - A_s = -11,81 \\ A'_s + A_s = 25,23 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A_s = 18,53 \text{ cm}^2 \quad (\text{armadura tracionada}) \\ A'_s = 6,71 \text{ cm}^2 \quad (\text{armadura comprimida}) \end{cases}$$

<sup>18</sup> Quando a peça for viga ou laje os limites impostos na Eq. 12 devem ser obedecidos.

Os resultados são muito próximos àqueles obtidos por Fusco (1981, p.59), calculados considerando o diagrama *parábola-retângulo*, de  $A_s = 18,90 \text{ cm}^2$  e  $A'_s = 6,82 \text{ cm}^2$ . Outras soluções também econômicas são possíveis com diferentes valores para  $x$  no domínio 3, e que proporcionam outros diferentes pares de armadura  $A_s$  e  $A'_s$ .

### 3.2.6 Exemplo 3

Calcular a armadura do **pilar** mostrado na Figura 25, sob força normal  $N_d = 840 \text{ kN}$  e momento fletor  $M_{d,x} = 3.545 \text{ kN.cm}$ ; excentricidade  $e_x = 4,22 \text{ cm}$ ; concreto C30; CA-50;  $b = 15 \text{ cm}$ ;  $h = 40 \text{ cm}$ ;  $d = 11 \text{ cm}$ ;  $d' = 4 \text{ cm}$ ;  $\gamma_c = 1,4$  (Figura 24).

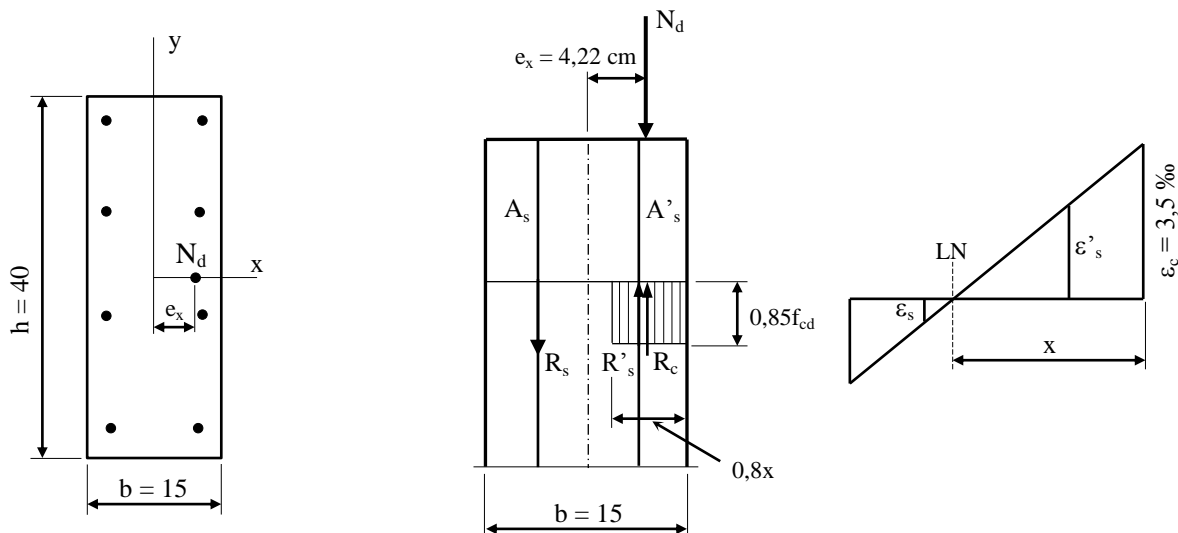


Figura 25 – Dimensões do pilar de seção retangular e deformações no domínio 4.

#### Resolução

A excentricidade  $e_x = 4,22 \text{ cm}$  é grande relativamente à largura do pilar ( $b = 15 \text{ cm}$ ), e o problema é de *flexo-compressão com grande excentricidade*, com momento fletor preponderante. Por questões práticas nos pilares é usual fazer a armadura **bilateral simétrica** (iguais em duas faces opostas). Considerando a Eq. 13 e a Eq. 15:

$$N_d = 0,68b \times f_{cd} + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}$$

$$M_d = 0,68b \times f_{cd} (h/2 - 0,4x) + (A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d')$$

e fazendo  $A_s = A'_s = A_{s,sim}$ , as equações ficam:

$$N_d = 0,68b \times f_{cd} + A_{s,sim} (\sigma'_{sd} - \sigma_{sd})$$

$$M_d = 0,68b \times f_{cd} (h/2 - 0,4x) + A_{s,sim} (\sigma_{sd} + \sigma'_{sd}) (h/2 - d')$$

Nas equações, as incógnitas são  $x$ ,  $A_{s,sim}$ ,  $\sigma_{sd}$  e  $\sigma'_{sd}$ , de modo que o cálculo pode ser feito por tentativa, adotando-se um valor para  $x$ , o que possibilita determinar as deformações e tensões nas armaduras. A armadura  $A_{s,sim}$  é calculada com a equação de  $N_d$ , e a equação de  $M_d$  deve ser verificada. O limite entre os domínios 3 e 4 é:

$$x_{3lim} = 0,63d = 0,63 \cdot 11 = 6,93 \text{ cm}$$

Fazendo tentativas para  $x$  no domínio 4, onde ocorre  $\epsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ , e supondo que a armadura comprimida terá deformação  $\epsilon'_s > \epsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$ , portanto  $\sigma'_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ :

a) 1ª tentativa: LN em  $x = 10,0 \text{ cm}$

A armadura tracionada tem a deformação (Eq. 21):

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon_s}{11-10,0} = \frac{3,5}{10,0} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = 0,35 \text{ ‰}$$

e com  $\varepsilon_s = 0,35 \text{ ‰}$  a tensão é:  $\sigma_{sd} = \varepsilon_s E_s = 0,00035 \cdot 21.000 = 7,35 \text{ kN/cm}^2$ . Aplicando os valores numéricos na equação de  $N_d$ :

$$N_d = 0,68b \cdot x \cdot f_{cd} + A_{s,\text{sim}} (\sigma'_{sd} - \sigma_{sd}) \quad \rightarrow \quad 840 = 0,68 \cdot 40 \cdot 10,0 \frac{3,0}{1,4} + A_{s,\text{sim}} (43,5 - 7,35)$$

$$A_{s,\text{sim}} = 7,14 \text{ cm}^2$$

Aplicando na equação de  $M_d$ :  $M_d = 0,68b \cdot x \cdot f_{cd} (h/2 - 0,4x) + A_{s,\text{sim}} (\sigma_{sd} + \sigma'_{sd}) (h/2 - d')$

$$3.545 = 0,68 \cdot 40 \cdot 10,0 \frac{3,0}{1,4} \left( \frac{15}{2} - 0,4 \cdot 10,0 \right) + 7,14 (7,35 + 43,5) \left( \frac{15}{2} - 4 \right)$$

$$3.545 \neq 3.307,7 \quad \rightarrow \quad \text{não ok!}$$

b) 2ª tentativa: LN em  $x = 9,5 \text{ cm}$

Deformação na armadura tracionada:

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon_s}{11-9,5} = \frac{3,5}{9,5} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = 0,55 \text{ ‰}$$

com  $\varepsilon_s = 0,55 \text{ ‰}$  a tensão é:  $\sigma_{sd} = \varepsilon_s E_s = 0,00055 \cdot 21.000 = 11,61 \text{ kN/cm}^2$ , e:

$$840 = 0,68 \cdot 40 \cdot 9,5 \frac{3,0}{1,4} + A_{s,\text{sim}} (43,5 - 11,61) \quad \rightarrow \quad A_{s,\text{sim}} = 9,00 \text{ cm}^2$$

Aplicando na equação de  $M_d$ :

$$3.545 = 0,68 \cdot 40 \cdot 9,5 \frac{3,0}{1,4} \left( \frac{15}{2} - 0,4 \cdot 9,5 \right) + 9,00 (11,61 + 43,5) \left( \frac{15}{2} - 4 \right)$$

$$3.545 \neq 3.782 \quad \rightarrow \quad \text{não ok!}$$

c) 3ª tentativa: LN em  $x = 9,75 \text{ cm}$

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon_s}{11-9,75} = \frac{3,5}{9,75} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = 0,45 \text{ ‰}$$

a tensão é:  $\sigma_{sd} = \varepsilon_s E_s = 0,00045 \cdot 21.000 = 9,42 \text{ kN/cm}^2$ , e:

$$840 = 0,68 \cdot 40 \cdot 9,75 \frac{3,0}{1,4} + A_{s,\text{sim}} (43,5 - 9,42) \quad \rightarrow \quad A_{s,\text{sim}} = 8,00 \text{ cm}^2$$
 , e aplicando na equação de  $M_d$ :

$$3.545 = 0,68 \cdot 40 \cdot 9,75 \frac{3,0}{1,4} \left( \frac{15}{2} - 0,4 \cdot 9,75 \right) + 8,00 (9,42 + 43,5) \left( \frac{15}{2} - 4 \right)$$

$$3.545 \cong 3.525 \quad \rightarrow \quad \text{ok! com uma pequena diferença de } 0,6 \text{ ‰.}$$

A deformação na armadura comprimida é:

$$\frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon'_s}{9,75-4} = \frac{3,5}{9,75} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_s = 2,06 \text{ ‰} \cong \varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰} \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

A solução com armadura bilateral simétrica ( $A_{s,\text{sim}} = A_s = A'_s = 8,00 \text{ cm}^2$ , Figura 26) é única, como mostrado nas tentativas efetuadas com diferentes valores de  $x$ .

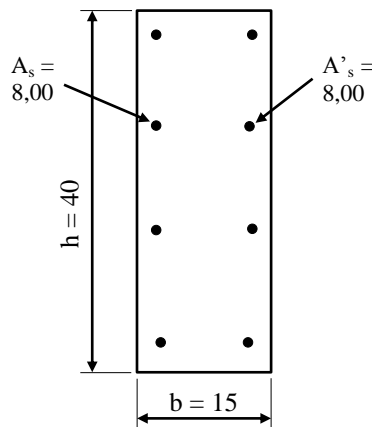


Figura 26 – Armadura bilateral simétrica no pilar ( $\text{cm}^2$ ).

### 3.2.7 Equações com Coeficientes Dimensionais K

Por meio de um artifício simples um problema de *Flexão Composta Normal* pode ser tratado como *Flexão Simples*, com armadura simples ou com armadura dupla (Figura 27 e Figura 28).<sup>19</sup> O processo consiste em transportar os esforços solicitantes  $N_d$  e  $M_d$ , relativos ao CG da seção transversal da peça, para o CG da armadura tracionada ( $A_s$ ), passando a ser considerado o momento fletor  $M_{sd} = N_d e_s$ . Como a força normal  $N_d$  é aplicada diretamente na armadura  $A_s$ , é por ela absorvida, e a sollicitação que resulta com o momento fletor  $M_{sd}$  é de *Flexão Simples*.

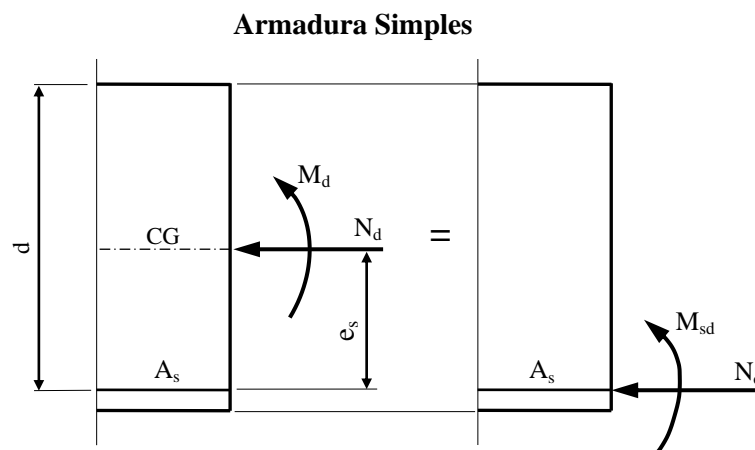


Figura 27 – Redução da FCN à Flexão Simples com armadura simples.

<sup>19</sup> Segundo Santos, o processo é antigo e foi introduzido por Loeser em edição alemã em 1925. A formulação com coeficientes K é apresentada em Fusco (1981) e Santos (1983).

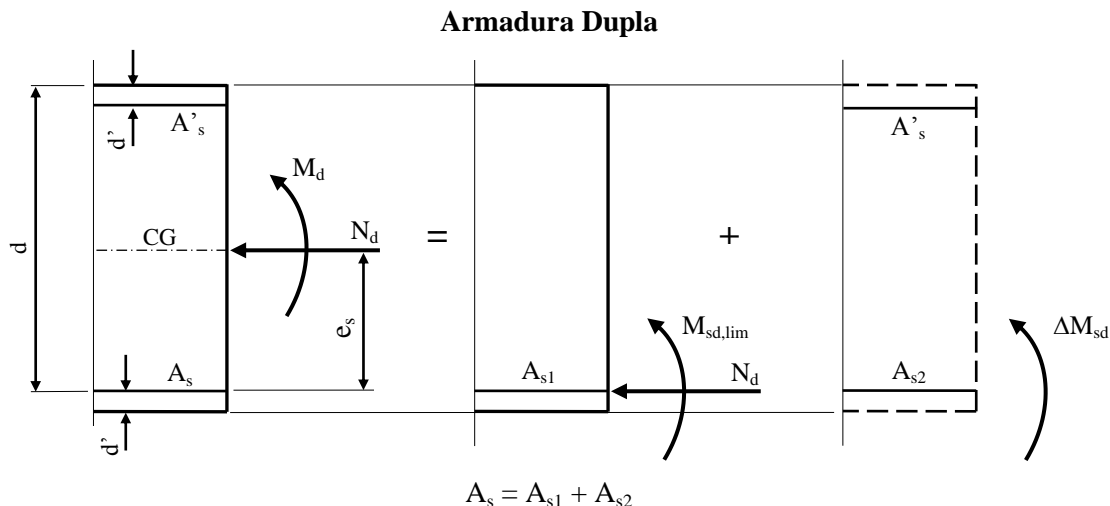


Figura 28 – Redução da FCN à Flexão Simples com armadura dupla.

A posição da LN é definida pelo coeficiente  $K_c$  :

$$K_c = \frac{b d^2}{M_{sd}} \quad \text{Eq. 23}$$

com  $K_c$  apresentado na Tabela A-1 (ou Tabela A-2), que proporciona valores de  $\beta_x$  e  $K_s$ , e o domínio de deformações. Com  $\beta_x = x/d$  a posição  $x$  da LN pode ser determinada, e um valor limite pode ser imposto a  $x$  com armadura simples, e caso superado esse limite, a solução passa a ser com armadura dupla. Isso também pode ser feito diretamente com o coeficiente  $K_c$ , isto é, se  $K_c \geq K_{c,lim}$ , a seção resulta com armadura simples (o que implica  $x \leq x_{lim}$ ).

A área da **armadura simples** é composta por duas parcelas, a primeira relativa ao momento fletor  $M_{sd}$ , e a segunda relativa à força normal  $N_d$  :

$$A_s = K_s \frac{M_{sd} \pm N_d}{d \sigma_{sd}} \quad \text{Eq. 24}$$

com sinal positivo (+) para força normal de **tração** e negativo (–) para N de **compressão**.

Para  $K_c < K_{c,lim}$  ( $x > x_{lim}$ ) a seção resulta com **armadura dupla**, e fixando-se  $K_c = K_{c,lim}$  calcula-se o máximo momento fletor que a seção pode resistir com armadura simples, relativa a  $x = x_{lim}$ :

$$M_{sd,lim} = \frac{b d^2}{K_{c,lim}} \quad \text{Eq. 25}$$

e o momento fletor excedente é:

$$\Delta M_{sd} = M_{sd} - M_{sd,lim} \quad \text{Eq. 26}$$

o qual é resistido por uma segunda parcela da armadura tracionada e pela armadura comprimida (ver Figura 28). Com  $K_{s,lim}$  correspondente a  $x = x_{lim}$  na Tabela A-1, a armadura tracionada é:

$$A_s = K_{s,lim} \frac{M_{sd,lim}}{d} + \frac{1}{\sigma_{sd}} \left( \frac{\Delta M_{sd}}{d - d'} \pm N_d \right) \quad \text{Eq. 27}$$

com sinal (+) para força normal de **tração** e (–) para N de **compressão**.

Com  $K'_s = 1/\sigma'_{sd}$ , determinado na Tabela A-3, é calculada a armadura comprimida:

$$A'_s = K'_s \frac{\Delta M_{sd}}{d - d'} \quad \text{Eq. 28}$$

Fusco (1981) observa que se o coeficiente de ponderação do concreto ( $\gamma_c$ ) for diferente de 1,4, deve ser empregada a largura fictícia para a peça, com valor:

$$b_{fic} = \frac{1,4b}{\gamma_c} \quad \text{Eq. 29}$$

### 3.2.8 Exemplo 4

Calcular as armaduras da seção do Exemplo 2 (item 3.2.5),<sup>20</sup> aplicando as equações com coeficientes K, sendo: força normal de compressão  $N_k = 500$  kN ; momento fletor  $M_k = 40.000$  kN.cm ;  $e = 80$  cm ; C25 ; CA-50 ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$  (Figura 29).

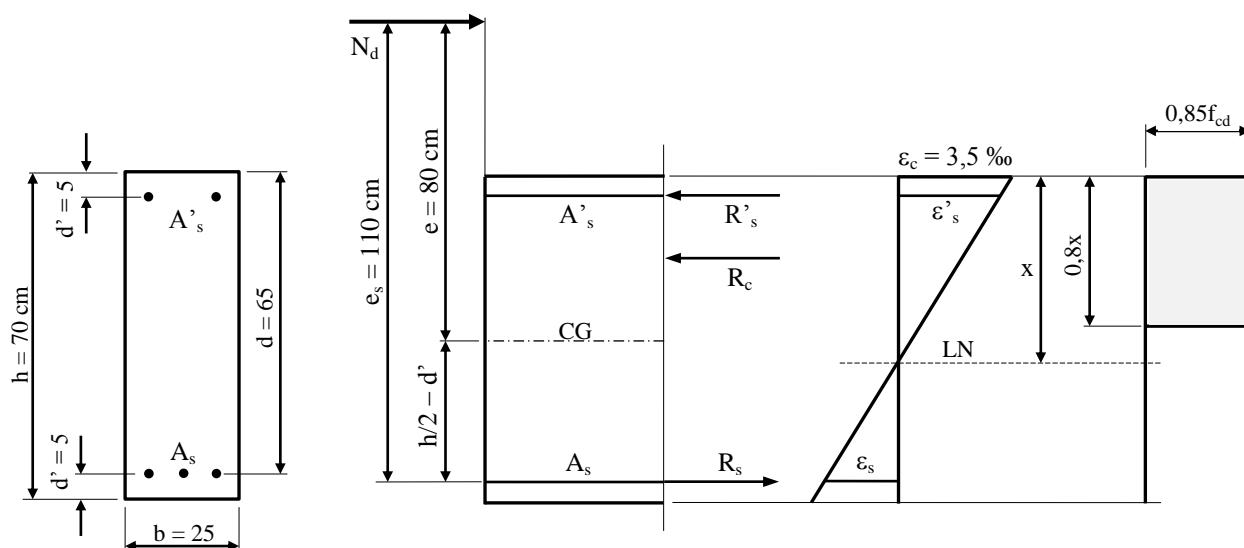


Figura 29 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular, nos domínios 3 e 4.

#### Resolução

A excentricidade da força normal ( $e = 80$  cm) é grande relativamente à altura da peça e o problema é de *flexo-compressão com grande excentricidade*, com momento fletor preponderante.<sup>21</sup> A excentricidade  $e_s$  da força normal em relação à armadura tracionada  $A_s$  é:

$$e_s = e + h/2 - d' = 80 + 35 - 5 = 110,0 \text{ cm}$$

A força normal de cálculo é:  $N_d = \gamma_f N_k = 1,4 \cdot 500 = 700$  kN

O momento fletor relativo à linha de ação da armadura tracionada  $A_s$  é:

$$M_{sd} = N_d e_s = 700 \cdot 110 = 77.000 \text{ kN.cm}$$

Com a Eq. 23 é definido o valor de  $K_c$  e a posição da LN:

$$K_c = \frac{b d^2}{M_{sd}} = \frac{25 \cdot 65^2}{77.000} = 1,4$$

<sup>20</sup> Este exemplo consta em Fusco (1981, p.57).

<sup>21</sup> Esta hipótese será comprovada com a determinação da posição  $x$  da LN e do domínio de deformações.

percebe-se que para o concreto C25 não existe  $K_c = 1,4$  na Tabela A-1, pois encontra-se no domínio 4, ou seja,  $\beta_x$  supera o valor limite entre os domínios 3 e 4 ( $\beta_{x,3lim} = 0,63$ ). Com  $\beta_{x,3lim} = 0,63$  tem-se os valores limites  $K_{s,lim} = 0,031$  e  $K_{c,lim} = 1,7$ , e:<sup>22</sup>

$K_c = 1,4 < K_{c,lim} = 1,7 \rightarrow$  portanto, a solução é com armadura dupla.

Com  $K_{c,lim} = 1,7$  determina-se o momento fletor relativo à posição da LN em  $x_{3lim}$  (Eq. 25):

$$M_{sd,lim} = \frac{b d^2}{K_{c,lim}} = \frac{25 \cdot 65^2}{1,7} = 62.132 \text{ kN.cm}$$

O momento fletor a ser resistido pela parcela  $A_{s2}$  da armadura tracionada e pela armadura comprimida  $A'_s$  é (Eq. 26):

$$\Delta M_{sd} = M_{sd} - M_{sd,lim} = 77.000 - 62.132 = 14.868 \text{ kN.cm}$$

A armadura tracionada resulta da Eq. 27 fazendo  $K_{s,lim} = 0,031$  e  $N_d$  negativa por ser de compressão:

$$A_s = K_{s,lim} \frac{M_{sd,lim}}{d} + \frac{1}{\sigma_{sd}} \left( \frac{\Delta M_{sd}}{d - d'} \pm N_d \right) = 0,031 \frac{62.132}{65} + \frac{1}{43,5} \left( \frac{14.868}{65 - 5} - 700 \right) = 19,23 \text{ cm}^2$$

Com  $d'/d = 5/65 = 0,08$ , na Tabela A-3 tem-se  $K'_s = 0,023$ , e a armadura comprimida (Eq. 28):

$$A'_s = K'_s \frac{\Delta M_{sd}}{d - d'} = 0,023 \frac{14.868}{65 - 5} = 5,70 \text{ cm}^2$$

E como foi fixada a LN em  $x_{3lim}$ , a deformação na armadura tracionada ( $A_s$ ) é  $\epsilon_s = \epsilon_{yd} = 2,07 \%$ , no concreto  $\epsilon_c = 3,5 \%$ , e as tensões  $\sigma_s = \sigma'_s = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ . Os resultados são muito próximos àqueles calculados por Fusco (1981, p.59), de  $A_s = 18,90 \text{ cm}^2$  e  $A'_s = 7,02 \text{ cm}^2$ , com diferenças devidas a simplificações nos valores das tabelas. Outras diversas soluções também econômicas são possíveis com diferentes valores para  $x$  no domínio 3, e que proporcionam outros pares de armaduras  $A_s$  e  $A'_s$ .

### 3.2.9 Exemplo 5

Calcular as armaduras aplicando equações com coeficientes  $K$ , sendo: força normal de compressão  $N_d = 1.000 \text{ kN}$ ; momento fletor  $M_d = 100.000 \text{ kN.cm}$ ; C20; CA-50 ( $f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ );  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$  (Figura 30).

#### Resolução

A excentricidade da força normal relativa ao CG da seção é:  $e = M_d / N_d = 100.000 / 1.000 = 100,0 \text{ cm}$ , grande relativamente à altura da peça (80 cm) e o problema é de *flexo-compressão com grande excentricidade*, com momento fletor preponderante. A excentricidade  $e_s$  da força normal em relação à armadura tracionada  $A_s$  é:

$$e_s = e + h/2 - d' = 100 + 40 - 4 = 136,0 \text{ cm}$$

O momento fletor relativo à linha de ação da armadura tracionada  $A_s$  é:

$$M_{sd} = N_d e_s = 1000 \cdot 136,0 = 136.000 \text{ kN.cm}$$

<sup>22</sup> Quando a peça for viga ou laje os limites impostos na Eq. 12 devem ser obedecidos.

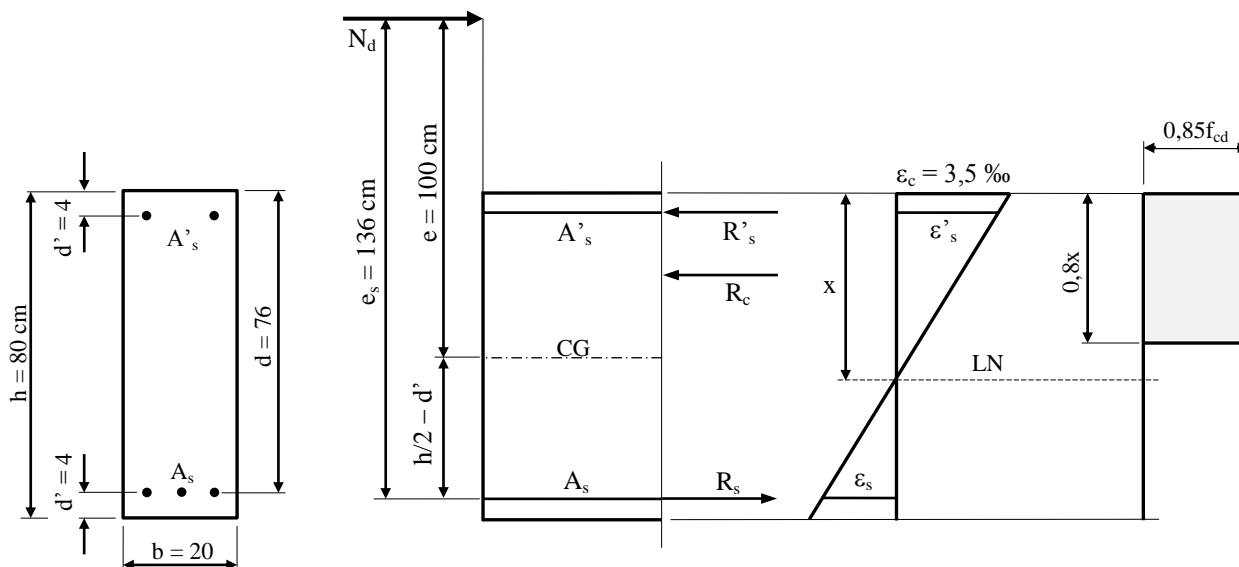


Figura 30 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular, nos domínios 3 e 4.

Com a Eq. 23 é definido o valor de  $K_c$  e a posição da LN:

$$K_c = \frac{b d^2}{M_{sd}} = \frac{20 \cdot 76^2}{136.000} = 0,8$$

percebe-se na Tabela A-1 que para o concreto C20 não existe  $K_c = 0,8$ , pois encontra-se no domínio 4, ou seja,  $\beta_x$  supera o valor limite entre os domínios 3 e 4 ( $\beta_{x,3lim} = 0,63$ ), ao qual corresponde os valores limites  $K_{s,lim} = 0,031$  e  $K_{c,lim} = 2,2$ , e:

$K_c = 0,8 < K_{c,lim} = 2,2 \rightarrow$  portanto, a solução é com armadura dupla.

Com  $K_{c,lim} = 2,2$  determina-se o momento fletor relativo à posição da LN em  $x_{3lim}$  (Eq. 25):

$$M_{sd,lim} = \frac{b d^2}{K_{c,lim}} = \frac{20 \cdot 76^2}{2,2} = 52.509 \text{ kN.cm}$$

O momento fletor a ser resistido pela parcela  $A_{s2}$  da armadura tracionada e pela armadura comprimida  $A'_s$  é (Eq. 26):

$$\Delta M_{sd} = M_{sd} - M_{sd,lim} = 136.000 - 52.509 = 83.491 \text{ kN.cm}$$

Com  $K_{s,lim} = 0,031$  (correspondente à  $\beta_{x,3lim} = 0,63$  na Tabela A-1) a armadura tracionada é (Eq. 27):

$$A_s = K_{s,lim} \frac{M_{sd,lim}}{d} + \frac{1}{\sigma_{sd}} \left( \frac{\Delta M_{sd}}{d - d'} \pm N_d \right) = 0,031 \frac{52.509}{76} + \frac{1}{43,5} \left( \frac{83.491}{76 - 4} - 1000 \right) = 25,09 \text{ cm}^2$$

Com  $d'/d = 4/76 = 0,05$ , na Tabela A-3 tem-se  $K'_s = 0,023$ , e a armadura comprimida (Eq. 28):

$$A'_s = K'_s \frac{\Delta M_{sd}}{d - d'} = 0,023 \frac{83.491}{76 - 4} = 26,67 \text{ cm}^2$$

Do mesmo modo como no exemplo anterior, com a LN fixada em  $x_{3lim}$ , a deformação na armadura  $A_s$  é  $\varepsilon_s = \varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$ , e as tensões  $\sigma_s = \sigma'_s = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ . Os resultados são muito próximos àqueles calculados por Santos (1983, p.519), de  $A_s = 22,70 \text{ cm}^2$  e  $A'_s = 32,10 \text{ cm}^2$ , sendo as diferenças nas armaduras creditadas ao antigo aço CA-50B utilizado por Santos. Outras diversas soluções também econômicas são possíveis com diferentes valores para  $x$  no domínio 3, e que proporcionam outros pares de armaduras  $A_s$  e  $A'_s$ .

### 3.3 Flexo-Compressão com Pequena Excentricidade

O esforço predominante é a força normal de compressão ( $N_d$ ), e devido à excentricidade da força, diz-se que ocorre a *flexo-compressão com pequena excentricidade*. O principal elemento é o **pilar**. A seção transversal tem as duas armaduras comprimidas ( $A_s$  e  $A'_s$ ), como mostrado na Figura 31 para uma seção no domínio 5.

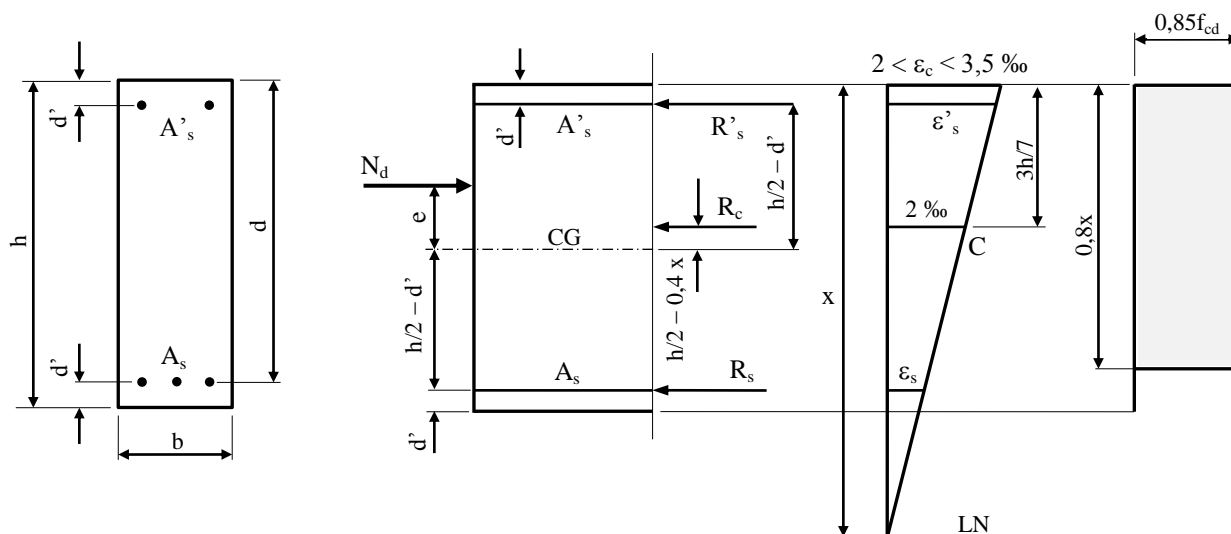


Figura 31 – FCN em seção retangular no domínio 5 com duas armaduras comprimidas.

A linha neutra (LN) encontra-se no intervalo entre  $d < x < +\infty$  (ou  $1 < \beta_x < +\infty$ ), correspondente aos domínios 4a, 5 e **reta b**. O ELU é caracterizado pela deformação de encurtamento do concreto de 3,5 ‰ no domínio 4a, e 2,0 ‰ a  $3h/7$  no domínio 5, portanto, a ruptura da peça ocorre pelo esmagamento do concreto comprimido.

O problema é indeterminado e com infinitas soluções, uma vez que existem duas equações de equilíbrio e três incógnitas ( $x$ ,  $A_s$  e  $A'_s$ ). Adotado um valor para  $x$ , são determinadas as deformações nas armaduras ( $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon'_s$ ), e então as tensões atuantes, que são aplicadas nas equações que equilibram os esforços resistentes com os esforços solicitantes de cálculo. A condição econômica é obtida fixando a **reta b** ( $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon'_s = 2$  ‰, e LN no  $+\infty$ ) ou com  $A_s = 0$ .

As equações surgem da análise do equilíbrio das forças normais que ocorrem na seção da Figura 31. São duas as situações possíveis em função da altura do diagrama retangular simplificado do concreto:  $0,8x < h$  e  $0,8x \geq h$ .

#### 3.3.1 Equações para $0,8x < h$

Neste caso, as equações podem ser simplesmente obtidas invertendo-se o sinal de  $R_s$  na Eq. 13 (ou Eq. 14) e na Eq. 15 (ou Eq. 16):

$$N_d = 0,68b x f_{cd} + A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 30}$$

$$M_d = 0,68b x f_{cd} (h/2 - 0,4x) + (A_s \sigma_{sd} - A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 31}$$

ou

$$N_d = 0,68b d \beta_x f_{cd} + A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 32}$$

$$M_d = 0,34b d^2 \beta_x f_{cd} (h/d - 0,8\beta_x) + (A_s \sigma_{sd} - A'_s \sigma'_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 33}$$

#### 3.3.2 Equações para $0,8x \geq h$

Neste caso, toda a altura da seção está submetida a tensões de compressão, conforme o diagrama *retangular simplificado*. A resultante no concreto comprimido está aplicada em  $h/2$  e tem o valor:

$$R_c = 0,85b h f_{cd}$$

A força normal e o momento fletor têm os valores:

$$N_d = 0,85b h f_{cd} + A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 34}$$

$$M_d = (A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}) (h/2 - d') \quad \text{Eq. 35}$$

As equações de compatibilidade de deformações são dependentes dos domínios:

a) Domínio 4a ( $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ )

$$\frac{\varepsilon_s}{x-d} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon_s}{\beta_x - 1} = \frac{\varepsilon'_s}{\beta_x - \frac{d'}{d}} = \frac{\varepsilon_c}{\beta_x} \quad \text{Eq. 36}$$

b) Domínio 5

$$\frac{\varepsilon_s}{x-d} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{2}{x - \frac{3}{7}h} \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon_s}{\beta_x - 1} = \frac{\varepsilon'_s}{\beta_x - \frac{d'}{d}} = \frac{2}{\beta_x - \frac{3h}{7d}} \quad \text{Eq. 37}$$

c) Reta b

$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon'_s = 2 \text{ ‰}$ . A tensão correspondente na armadura é 420 MPa para o aço CA-50.

### 3.3.3 Definição das Armaduras

Considerando a máxima força relativa ao concreto comprimido ( $R_c$ ) que pode ocorrer na seção, e fazendo o equilíbrio de momentos fletores na armadura comprimida  $A'_s$  fica (Figura 32):

$$M_d = N_d e'_s = R_c (h/2 - d') + R_s (d - d') \quad , \text{ com } R_c = 0,85f_{cd} b h$$

Tomando  $A_s = 0$  define-se a excentricidade de  $N_d$  em relação à linha de ação de  $A'_s$ :

$$e'_s = \frac{0,85f_{cd} b h}{N_d} \left( \frac{h}{2} - d' \right)$$

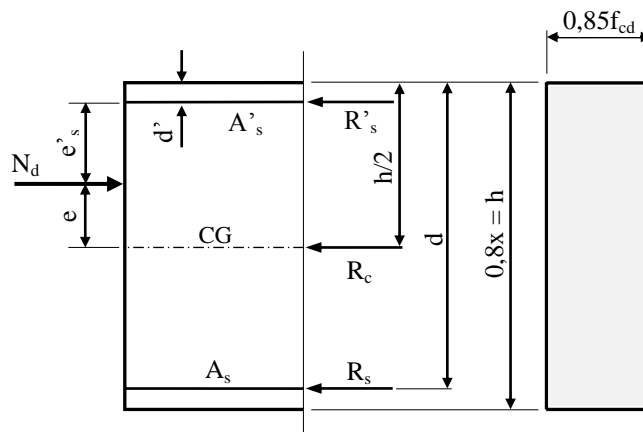


Figura 32 – Definição da excentricidade  $e'_s$ .

Com a excentricidade  $e'_s$  a força normal  $N_d$  é absorvida apenas pela área de concreto comprimido e pela armadura mais comprimida ( $A'_s$ ), sem auxílio da armadura menos comprimida ( $A_s$ ), de modo que  $e'_s$  delimita a necessidade ou não da armadura menos comprimida. Fazendo  $e'_s$  como um valor limite tem-se:

$$e'_s \leq e'_{s,\text{lim}} \rightarrow \text{armadura unilateral (somente } A'_s) \quad \text{Eq. 38}$$

$$e'_s > e'_{s,\text{lim}} \rightarrow \text{armadura dupla (} A'_s \text{ e } A_s)$$

com:

$$e'_s = h/2 - e - d' \quad \text{Eq. 39}$$

$$e'_{s,\text{lim}} = \frac{0,85f_{cd} b h}{N_d} \left( \frac{h}{2} - d' \right) \quad \text{Eq. 40}$$

### 3.3.4 Exemplo 1

Calcular as armaduras  $A_s$  e  $A'_s$  para uma seção transversal retangular submetida à *flexo-compressão*, com força normal de compressão  $N_k = 3.000$  kN e momento fletor  $M_k = 20.000$  kN.cm. São conhecidos: concreto C30 ; aço CA-50 ( $f_{yd} = 43,5$  kN/cm<sup>2</sup>); seção retangular  $b = 25$  cm e  $h = 80$  cm ;  $d = 76$  cm ;  $d' = 4$  cm ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$ .

#### Resolução

Os valores de cálculo são:  $N_d = \gamma_f N_k = 1,4 \cdot 3000 = 4.200$  kN, e  $M_d = \gamma_f M_k = 1,4 \cdot 20000 = 28.000$  kN.cm. A excentricidade da força normal é:  $e = M_d / N_d = 28.000 / 4.200 = 6,67$  cm. Como a excentricidade é pequena relativamente à altura da peça (80 cm), a hipótese é de *flexo-compressão com pequena excentricidade*. A definição quanto a colocar armadura unilateral ( $A_s = 0$ ) ou armadura dupla ( $A_s$  e  $A'_s$ ) é feita com a comparação entre as excentricidades  $e'_s$  e  $e'_{s,\text{lim}}$ , sendo a armadura unilateral calculada nos domínios 4a ou 5, e armadura dupla na **reta b**.

Com a Eq. 39 é calculada a excentricidade ( $e'_s$ ) entre a força  $N_d$  e a armadura comprimida ( $A'_s$ ), e com Eq. 40 é calculada a excentricidade limite:

$$e'_s = h/2 - e - d' = 80/2 - 6,67 - 4 = 29,33 \text{ cm}$$

$$e'_{s,\text{lim}} = \frac{0,85f_{cd} b h}{N_d} \left( \frac{h}{2} - d' \right) = \frac{0,85 (3,0/1,4) 25 \cdot 80}{4.200} \left( \frac{80}{2} - 4 \right) = 31,22 \text{ cm}$$

e conforme a Eq. 38, como  $e'_s = 29,33$  cm  $<$   $e'_{s,\text{lim}} = 31,22$  cm, a solução com armadura unilateral ( $A_s = 0$ ) é possível (Figura 33). Assim, será feita  $A_s = 0$ , e neste caso a posição  $x$  da LN é uma das incógnitas, juntamente com a armadura  $A'_s$ .

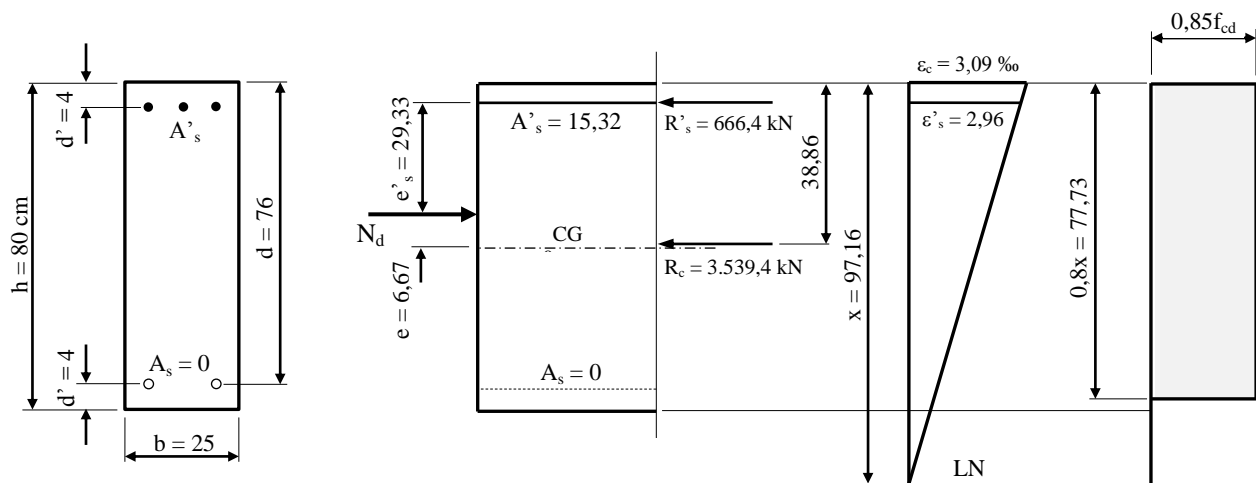


Figura 33 – Resultados numéricos na flexo-compressão com pequena excentricidade em seção retangular.

Tomando a hipótese de  $0,8x < h$  são aplicadas a Eq. 30 e a Eq. 31, para determinação de  $x$  e  $A'_s$ :

$$N_d = 0,68b x f_{cd} + A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}$$

$$M_d = 0,68b x f_{cd} (h/2 - 0,4x) + (A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}) (h/2 - d')$$

Supondo que a armadura  $A'_s$  escoar ( $\sigma'_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ ) tem-se:

$$\begin{cases} 4.200 = 0,68 \cdot 25 \cdot x \frac{3,0}{1,4} + A'_s 43,5 \\ 28.000 = 0,68 \cdot 25 \cdot x \frac{3,0}{1,4} \left( \frac{80}{2} - 0,4x \right) + (A'_s 43,5) \left( \frac{80}{2} - 4 \right) \end{cases}$$

Das equações resultam  $x = 97,16 \text{ cm}$  e  $A'_s = 15,32 \text{ cm}^2$ . Fazendo a verificação:

$$0,8x = 0,8 \cdot 97,16 = 77,73 \text{ cm} < h = 80 \quad \rightarrow \text{ok! , e como } x > h, \text{ o domínio é o 5.}$$

A deformação na armadura  $A'_s$  é:

$$\frac{\varepsilon_s}{x-d} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{2}{x-\frac{3}{7}h} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon'_s}{97,16-4} = \frac{2}{97,16-\frac{3}{7}80} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_s = 2,96 \text{ ‰}$$

e como  $\varepsilon'_s = 2,96 \text{ ‰} > \varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$ , está correta a tensão  $\sigma'_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ .

### 3.3.5 Exemplo 2

Dimensionar a seção transversal retangular submetida à *flexo-compressão*, apresentada por Fusco (1981, p.77). São dados: força normal de compressão  $N_d = 4.200 \text{ kN}$ ; excentricidade  $e = 10,0 \text{ cm}$ ; concreto C25; aço CA-50 ( $f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ ); seção retangular  $b = 25 \text{ cm}$  e  $h = 70 \text{ cm}$ ;  $d = 65 \text{ cm}$ ;  $d' = 5 \text{ cm}$ ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$ .

#### Resolução

Como a excentricidade de  $10,0 \text{ cm}$  é pequena relativamente à altura da peça ( $70 \text{ cm}$ ), a hipótese é de *flexo-compressão com pequena excentricidade*. Com a Eq. 39 é calculada a excentricidade entre a força  $N_d$  e a armadura comprimida ( $A'_s$ ), e com Eq. 40 é calculada a excentricidade limite:

$$e'_s = h/2 - e - d' = 70/2 - 10,0 - 5 = 20,0 \text{ cm}$$

$$e'_{s,\text{lim}} = \frac{0,85f_{cd} b h \left( \frac{h}{2} - d' \right)}{N_d} = \frac{0,85 (2,5/1,4) 25 \cdot 70 \left( \frac{70}{2} - 5 \right)}{4.200} = 18,97 \text{ cm}$$

e conforme a Eq. 38, como  $e'_s = 20,0 \text{ cm} > e'_{s,\text{lim}} = 18,97 \text{ cm}$ , a solução com armadura unilateral (somente  $A'_s$ ) não é possível, e a solução é com armadura dupla ( $A_s$  e  $A'_s$ ). A seção está mostrada na Figura 34.

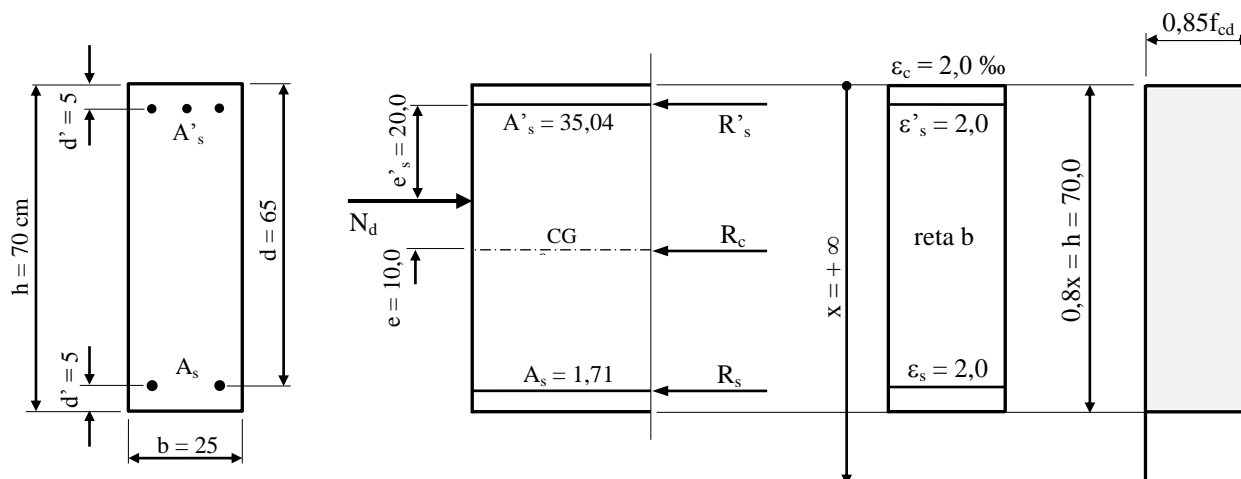


Figura 34 – Resultados numéricos na flexo-compressão com pequena excentricidade em seção retangular.

Tomando a hipótese de  $0,8x \geq h$  são aplicadas a Eq. 34 e a Eq. 35:

$$N_d = 0,85b h f_{cd} + A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}$$

$$M_d = (A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}) (h/2 - d')$$

Considerando a solução na **reta b**, tem-se  $\epsilon_c = \epsilon'_s = \epsilon_s = 2,0 \%$  e  $\sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = 42,0 \text{ kN/cm}^2$  (aço CA-50). Aplicando os valores numéricos:

$$\begin{cases} 4.200 = 0,85 \cdot 25 \cdot 70 \frac{2,5}{1,4} + A_s 42,0 + A'_s 42,0 \\ 4.200 \cdot 10,0 = (A'_s 42,0 - A_s 42,0) \left( \frac{70}{2} - 5 \right) \end{cases}$$

Das equações resultam  $A_s = 1,71 \text{ cm}^2$  e  $A'_s = 35,04 \text{ cm}^2$ .

### 3.4 Equações Adimensionais

O dimensionamento de elementos com as equações de equilíbrio apresentadas é muito laborioso no trabalho no dia a dia, e por esta razão há décadas foram desenvolvidas equações adimensionais de aplicação mais simples. E com o auxílio de ábacos, feitos para diferentes arranjos da armadura na seção transversal, as armaduras podem ser determinadas rapidamente.

Conforme as equações desenvolvidas para os diferentes casos de solicitação, são apresentadas a seguir as equações adimensionais, separadas de acordo com as situações possíveis para as armaduras  $A_s$  e  $A'_s$  (duas armaduras tracionadas, uma armadura tracionada e outra comprimida, e duas armaduras comprimidas).

#### 3.4.1 Duas Armaduras Tracionadas

Para a solicitação de *tração simples* e *flexo-tração com pequena excentricidade* foi definida a Eq. 9:

$$N_d = A_s f_{yd} + A'_s \sigma'_{sd}$$

Dividindo todos os termos por  $(b h f_{cd})$  e multiplicando o último termo por  $f_{yd}/f_{yd}$ , e chamando a equação como  $v$  (ni), tem-se:

$$v = \frac{N_d}{b h f_{cd}} = \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}} + \frac{A'_s \sigma'_{sd} f_{yd}}{b h f_{cd} f_{yd}}$$

E nomeando o primeiro e o segundo termos como  $\omega$  e  $\omega'$  (ômega):

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}}, \quad \text{e} \quad \omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{b h f_{cd}} \quad \text{Eq. 41}$$

resulta:

$$v = \omega + \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} \quad \text{Eq. 42}$$

E com a Eq. 10, relativa ao momento fletor:

$$M_d = (A_s f_{yd} - A'_s \sigma'_{sd}) \cdot (h/2 - d')$$

Dividindo todos os termos por  $(b h^2 f_{cd})$  e multiplicando o último termo por  $f_{yd}/f_{yd}$ , e chamando a equação como  $\mu$  (mi):

$$\mu = \frac{M_d}{b h^2 f_{cd}} = \left( \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}} \frac{1}{h} - \frac{A'_s \sigma'_{sd}}{b h f_{cd}} \frac{1}{h} \frac{f_{yd}}{f_{yd}} \right) \left( \frac{h}{2} - d' \right) \rightarrow \mu = \frac{M_d}{b h^2 f_{cd}} = \left( \frac{A_s f_{yd}}{b h f_{cd}} - \frac{A'_s \sigma'_{sd}}{b h f_{cd}} \frac{f_{yd}}{f_{yd}} \right) \left( \frac{h}{2} - \frac{d'}{h} \right)$$

e com os valores de  $\omega$  e  $\omega'$  definidos na Eq. 41:

$$\mu = \left( \omega - \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{d'}{h} \right) \quad \text{Eq. 43}$$

### 3.4.2 Uma Armadura Tracionada e outra Comprimida

Para a *flexo-compressão* foram definidas a Eq. 14 e a Eq. 16:

$$N_d = 0,68b d \beta_x f_{cd} + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}$$

$$M_d = 0,34b d^2 \beta_x f_{cd} (h/d - 0,8\beta_x) + (A_{s1} \sigma_{s1} + A_{s2} \sigma_{s2}) (h/2 - d')$$

Do mesmo modo como feito no item anterior, são definidos os valores de  $v$  e  $\mu$ :

$$v = 0,68 \left( 1 - \frac{d'}{h} \right) \beta_x - \omega \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} + \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} \quad \text{Eq. 44}$$

$$\mu = 0,34 \left( 1 - \frac{d'}{h} \right)^2 \beta_x \left( \frac{h}{d} - 0,8\beta_x \right) + \left( \omega \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} + \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{d'}{h} \right) \quad \text{Eq. 45}$$

### 3.4.3 Duas Armaduras Comprimidas

Para a  $0,8x < h$  foram definidas a Eq. 32 e a Eq. 33:

$$N_d = 0,68b d \beta_x f_{cd} + A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}$$

$$M_d = 0,34b d^2 \beta_x f_{cd} (h/d - 0,8\beta_x) + (A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}) (h/2 - d')$$

E são definidos os valores de  $v$  e  $\mu$ :

$$v = 0,68 \left( 1 - \frac{d'}{h} \right) \beta_x + \omega \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} + \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} \quad \text{Eq. 46}$$

$$\mu = 0,34 \left( 1 - \frac{d'}{h} \right)^2 \beta_x \left( \frac{h}{d} - 0,8\beta_x \right) + \left( \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} - \omega \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{d'}{h} \right) \quad \text{Eq. 47}$$

E da Eq. 34 e Eq. 35 para a  $0,8x \geq h$ :

$$N_d = 0,85b h f_{cd} + A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd}$$

$$M_d = (A'_s \sigma'_{sd} - A_s \sigma_{sd}) (h/2 - d')$$

$$v = 0,85 + \omega \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} + \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} \quad \text{Eq. 48}$$

$$\mu = \left( \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} - \omega \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{d'}{h} \right) \quad \text{Eq. 49}$$

### 3.5 Ábaco com Armadura Bilateral Simétrica

A Figura 35 mostra a seção transversal com armadura igual em duas faces opostas (bilateral simétrica). A área de armadura total  $A_{s,tot}$  é a soma das parcelas  $A_s$  e  $A'_s$  :

$$A_{s,tot}/2 = A_s = A'_s \quad \rightarrow \quad \omega_{tot}/2 = \omega = \omega'$$

$$\text{com: } \omega_{tot} = \frac{A_{s,tot} f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

e a área da seção transversal:  $A_c = b h$

Fixando-se o tipo de aço e a relação  $d'/h$ , para cada par  $(\beta_x, \omega_{tot})$  escolhido para a LN, existe um único par  $(v, \mu)$ :

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{b h^2 f_{cd}} = v \frac{e}{h}$$

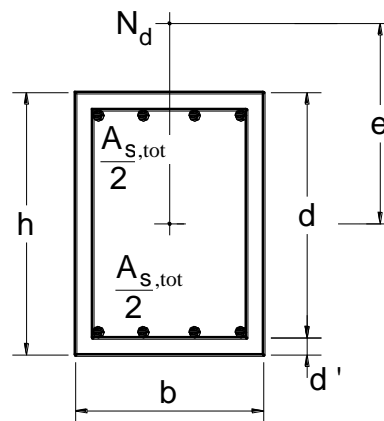


Figura 35 – Seção transversal com armadura bilateral simétrica na FCN.

#### Exemplo

Definir os valores adimensionais  $v$  e  $\mu$  sendo fixados os seguintes valores:  $\omega_{tot} = 0,8$  e  $\beta_x = 1,0$  (para  $x = d$ , ou seja, no limite entre os domínios 4 e 4a,  $d'/h = 0,10$  e aço CA-50).

#### Resolução

Para a Resolução podem ser aplicadas as equações Eq. 44 e Eq. 45, relativas à Eq. 14 e à Eq. 16 (ou Eq. 32 e Eq. 33). E como  $x = d$ , a tensão na armadura  $A_s$  é zero ( $\sigma_{sd} = 0$ ), portanto  $A_s = \omega = 0$ . Com a Eq. 44 e Eq. 45:

$$v = 0,68 \left(1 - \frac{d'}{h}\right) \beta_x - \omega \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} + \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} = 0,68(1 - 0,10)1,0 + \frac{\omega_{tot}}{2} \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}}$$

$$\mu = 0,34 \left(1 - \frac{d'}{h}\right)^2 \beta_x \left(\frac{h}{d} - 0,8\beta_x\right) + \left(\omega \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} + \omega' \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{d'}{h}\right)$$

$$\mu = 0,34(1 - 0,10)^2 1,0 \left(\frac{h}{d} - 0,8 \cdot 1,0\right) + \left(\frac{\omega_{tot}}{2} \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}}\right) \left(\frac{1}{2} - 0,10\right)$$

A equação de compatibilidade a ser aplicada é a Eq. 22:

$$\frac{\varepsilon_s}{1 - \beta_x} = \frac{\varepsilon'_s}{\beta_x - \frac{d'}{d}} = \frac{\varepsilon_c}{\beta_x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_s = \varepsilon_c \frac{\beta_x - \frac{d'}{d}}{\beta_x} = \varepsilon_c \frac{\beta_x - \frac{d'/h}{1 - d'/h}}{\beta_x} = 3,5 \frac{1 - 0,10}{1} = 3,11\%$$

$$\text{com } \frac{d'}{d} = \frac{d'}{h - d'} = \frac{\frac{d'}{h}}{\frac{h - d'}{h}} = \frac{\frac{d'}{h}}{\frac{h}{h} - \frac{d'}{h}} = \frac{\frac{d'}{h}}{1 - \frac{d'}{h}}$$

Como a deformação  $\varepsilon'_s = 3,11\% > \varepsilon_{yd} = 2,07\%$ , a tensão na armadura  $A'_s$  é  $\sigma'_{sd} = f_{yd}$ . E aplicando nas equações de  $v$  e  $\mu$ :

$$v = 0,68(1-0,10)1,0 + \frac{\omega_{tot}}{2} \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} = 0,68(1-0,10)1,0 + \frac{0,8}{2} \frac{f_{yd}}{f_{yd}} = 1,01$$

$$\mu = 0,34(1-0,10)^2 1,0 \left( \frac{h}{d} - 0,8 \cdot 1,0 \right) + \left( \frac{\omega_{tot}}{2} \frac{\sigma'_{sd}}{f_{yd}} \right) \left( \frac{1}{2} - 0,10 \right) = 0,2754 \left( \frac{1}{1 - \frac{d'}{h}} - 0,8 \right) + \left( \frac{0,8}{2} \frac{f_{yd}}{f_{yd}} \right) 0,4$$

$$\text{com } \frac{h}{d} = \frac{d+d'}{h-d'} = \frac{(h-d')+d'}{h-d'} = \frac{h}{h-d'} = \frac{\frac{h}{h-d'}}{\frac{h}{h-d'}} = \frac{1}{1 - \frac{d'}{h}}$$

$$\mu = 0,2754 \left( \frac{1}{1-0,10} - 0,8 \right) + 0,16 = 0,25$$

O par  $v = 1,01$  e  $\mu = 0,25$  representa um ponto do ábaco (Figura 36), e como se pode observar, o ponto é próximo da linha divisória entre os domínios 4 e 4a, dado que  $x = d$ .

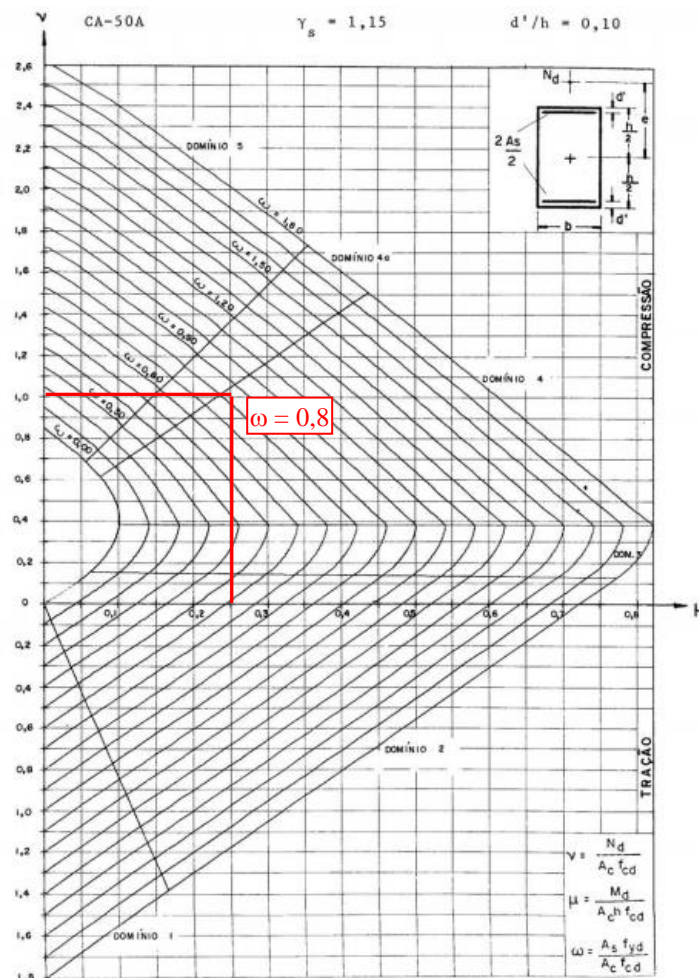


Figura 36 – Ponto para  $\omega = 0,8$  no ábaco de Venturini (1987) com armadura bilateral simétrica, para a FCN com  $d'/h = 0,10$ .

### 3.6 Cálculo da Armadura com Ábacos

No dimensionamento feito manualmente de elementos estruturais, principalmente pilares, os ábacos são imprescindíveis, porque permitem a rápida determinação da taxa de armadura, sem necessidade de aplicar as equações teóricas da *Flexão Composta*. Além disso, os ábacos proporcionam a fácil escolha de diferentes arranjos de armadura na seção transversal. Para cada caso de solicitação, ábacos diferentes podem ser

utilizados, no entanto, o ábaco deve ser escolhido de modo a resultar na menor armadura, e portanto a mais econômica.

Neste texto serão aplicados os ábacos de Venturini (1987)<sup>23</sup> para a *Flexão Composta Normal* (ou Reta). Esses ábacos devem ser aplicados apenas no dimensionamento de elementos com concretos do Grupo I de resistência ( $f_{ck} \leq 50$  MPa), porque foram desenvolvidos com alguns parâmetros numéricos que não se aplicam aos concretos do Grupo II. São válidos para seção transversal retangular.

A Figura 37 mostra a notação aplicada nos ábacos, onde  $d'$  é a distância entre a face da seção transversal e o centro da barra de aço do canto, sendo paralela à excentricidade ( $e$ ) da força normal. De modo geral tem-se  $d' = c + \phi_t + \phi_l/2$ , com  $c$  = cobrimento de concreto,  $\phi_t$  = diâmetro do estribo e  $\phi_l$  = diâmetro da barra longitudinal.

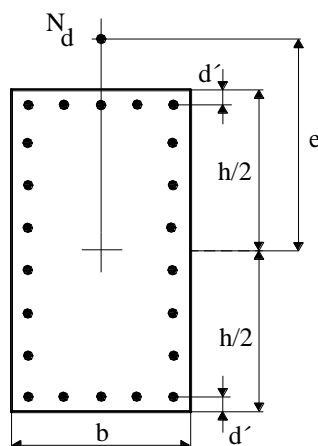


Figura 37 – Notação para a Flexão Composta Normal (Venturini, 1987).

As equações para a construção dos ábacos encontram-se apresentadas em Venturini (1987), e a determinação da armadura é iniciada pelo cálculo dos esforços adimensionais  $v$  (ni) e  $\mu$  (mi), já definidos e com os valores:

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad \text{Eq. 50}$$

$$\mu = \frac{M_d}{h A_c f_{cd}}, \text{ ou} \quad \text{Eq. 51}$$

$$\mu = v \frac{e}{h} \quad \text{Eq. 52}$$

$N_d$  = força normal de cálculo;

$A_c$  = área da seção transversal do pilar;

$f_{cd}$  = resistência de cálculo do concreto à compressão ( $f_{ck}/\gamma_c$ );

$M_d$  = momento fletor de cálculo;

$h$  = dimensão do pilar na direção considerada;

$e$  = excentricidade na direção considerada.

Escolhida uma disposição construtiva para a armadura no pilar, determina-se o ábaco a ser utilizado, em função do tipo de aço e do valor da relação  $d'/h$ . No ábaco, com o par  $v$  e  $\mu$ , obtém-se a taxa mecânica  $\omega$  (ômega). A armadura é calculada pela expressão:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} \quad \text{Eq. 53}$$

<sup>23</sup> VENTURINI, W.S. ; RODRIGUES, R.O. *Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, USP, 1987, 133p. Disponível em (23/08/21): <http://www.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Abacos Flexao Normal Venturini>

## 4. FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

Para o estudo da formulação teórica da *Flexão Composta Oblíqua* recomendamos os livros de Fusco (1981) e de Santos (1983).

### 4.1 Cálculo da Armadura com Ábacos

Neste texto serão aplicados os ábacos de Pinheiro et al. (2009)<sup>24</sup> para a *Flexão Composta Oblíqua*.<sup>25</sup> Os ábacos devem ser aplicados apenas no dimensionamento de elementos com concretos do Grupo I de resistência ( $f_{ck} \leq 50$  MPa), porque foram desenvolvidos com alguns parâmetros numéricos que não se aplicam aos concretos do Grupo II, e para seção retangular. Para cada caso de solicitação, ábacos diferentes podem ser utilizados, no entanto, o ábaco deve ser escolhido de modo a resultar na menor armadura, e portanto a mais econômica.

A Figura 38 mostra a notação aplicada nos ábacos, onde as distâncias  $d'_x$  e  $d'_y$  têm o mesmo significado da distância  $d'$  dos ábacos para FCN, porém, cada uma em uma direção do pilar.

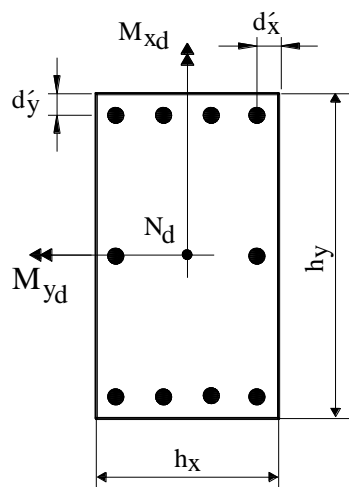


Figura 38 – Flexão Composta Oblíqua (Pinheiro, 2009).

A determinação da armadura é iniciada pelo cálculo dos esforços adimensionais  $v$  e  $\mu$ , com  $\mu$  segundo as duas direções principais da seção:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{h_x A_c f_{cd}} = v \frac{e_x}{h_x} \quad \text{Eq. 54}$$

$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{h_y A_c f_{cd}} = v \frac{e_y}{h_y} \quad \text{Eq. 55}$$

Escolhido um arranjo ou disposição das barras de aço na seção transversal do pilar, e em função dos valores das relações  $d'_x/h_x$  e  $d'_y/h_y$ , determina-se o ábaco a ser utilizado. Com o trio ( $v$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ) obtém-se a taxa mecânica  $\omega$ . A armadura é calculada com a Eq. 53:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}}$$

<sup>24</sup> PINHEIRO, L.M. ; BARALDI, L.T. ; POREM, M.E. *Estruturas de Concreto: Ábacos para Flexão Oblíqua*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, USP, 2009, 108p. Disponível em (23/08/21):

<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Abacos Flexao Obligua Pinheiro>

<sup>25</sup> Outros ábacos também podem ser utilizados, como de Fusco (1981), Santos (1983), Süsskind (1984).

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2014, 238p.

FUSCO, P.B. *Estruturas de concreto - Solicitações normais*. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois, 1981, 464p.

PINHEIRO, L.M. ; BARALDI, L.T. ; POREM, M.E. *Estruturas de Concreto: Ábacos para Flexão Oblíqua*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, USP, 2009, 108p. Disponível em (23/08/21): <http://www.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Abacos Flexao Obliqua Pinheiro>

PINHEIRO, L.M. *Flexão Composta e Instabilidade. Notas de Aula*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1994.

SANTOS, L.M. *Cálculo de Concreto Armado*, v.1, São Paulo, Ed. LMS, 1983, 541p.

SÜSSEKIND, J.C. *Curso de concreto*, v. 2, 4<sup>a</sup> ed., Porto Alegre, Ed. Globo, 1984, 280p.

VENTURINI, W.S. ; RODRIGUES, R.O. *Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, USP, 1987, 133p. Disponível em (23/08/21): <http://www.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Abacos Flexao Normal Venturini>

## PARTE II – PILARES DE CONCRETO ARMADO

### 5. INTRODUÇÃO

O dimensionamento dos pilares é feito em função dos esforços externos solicitantes de cálculo, que podem compreender forças normais ( $N_d$ ), momentos fletores ( $M_{dx}$  e  $M_{dy}$ ), e forças cortantes ( $V_{dx}$  e  $V_{dy}$ ).

A NBR 6118, na versão de 2003, fez modificações em algumas das metodologias de cálculo das estruturas de Concreto Armado, como também em alguns parâmetros aplicados no dimensionamento e verificação de estruturas. Especial atenção foi dada à questão da durabilidade das peças de concreto. Particularmente no caso dos **pilares**, a norma introduziu várias modificações, como no valor da excentricidade accidental, um maior cobrimento de concreto, uma nova metodologia para o cálculo da esbeltez limite relativa à consideração ou não dos momentos fletores de 2ª ordem e, principalmente, com a consideração de um **momento fletor mínimo**, que pode substituir o momento fletor devido à excentricidade accidental. A versão de 2014 da NBR 6118<sup>26</sup> manteve essas prescrições, e introduziu que a verificação do momento fletor mínimo pode ser feita comparando uma envoltória resistente, que englobe a envoltória mínima com 2ª ordem.

Este texto trata apenas dos pilares, ou seja, não apresenta o dimensionamento dos pilares-paredes.<sup>27</sup> O dimensionamento dos pilares com índice de esbeltez máximo até 90 é feito segundo as duas possibilidades constantes da NBR6118: com a aplicação do momento fletor mínimo, e com a excentricidade accidental em substituição ao momento fletor mínimo. Cabe ao projetista estrutural escolher a metodologia que desejar aplicar.

No item 17.2.5 (“*Processo aproximado para o dimensionamento à flexão composta oblíqua*”) a NBR 6118 apresenta um método simplificado para o projeto de pilares sob *Flexão Composta Normal e Oblíqua*, que não será apresentado neste texto. A definição das características do concreto e do cobrimento da armadura são itens muito importantes no projeto de estruturas de concreto, sendo por isso apresentadas a seguir algumas prescrições da norma que auxiliam na escolha do concreto.

### 6. ESPECIFICAÇÕES DO CONCRETO E DO COBRIMENTO

Segundo a NBR 6118 (item 6.4.1), “*A agressividade do meio ambiente está relacionada às ações físicas e químicas que atuam sobre as estruturas de concreto, independentemente das ações mecânicas, das variações volumétricas de origem térmica, da retração hidráulica e outras previstas no dimensionamento das estruturas.*” Nos projetos das estruturas correntes, a agressividade ambiental deve ser classificada de acordo com o apresentado na Tabela 2 e pode ser avaliada, simplificada, segundo as condições de exposição da estrutura ou de suas partes (NBR 6118, item 6.4.2). Conhecendo o ambiente em que a estrutura será construída, o projetista estrutural pode considerar uma condição de agressividade maior que aquelas mostradas na Tabela 2.

Conforme a NBR 6118 (item 7.4), a “*... durabilidade das estruturas é altamente dependente das características do concreto e da espessura e qualidade do concreto do cobrimento da armadura.*” “*Ensaio comprobatório de desempenho da durabilidade da estrutura frente ao tipo e classe de agressividade prevista em projeto devem estabelecer os parâmetros mínimos a serem atendidos. Na falta destes e devido à existência de uma forte correspondência entre a relação água/cimento e a resistência à compressão do concreto e sua durabilidade, permite-se que sejam adotados os requisitos mínimos expressos*” na Tabela 3.

O concreto utilizado deve cumprir com os requisitos contidos na NBR 12655<sup>28</sup> e diversas outras normas (item 7.4.3). Para parâmetros relativos ao Concreto Protendido consultar a Tabela 7.1 da NBR 6118.

<sup>26</sup> ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, NBR 6118. ABNT, 2014, 238p.

<sup>27</sup> Para estudo de pilares-paredes ver KIMURA, A.E. *EE05 - Pilares: Módulo EE05*. São Paulo, FESP/ABECE/TQS, 2010. 272 p.

<sup>28</sup> ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Concreto de cimento Portland - Preparo, controle, recebimento e aceitação - Procedimento*, NBR 12655. ABNT, 2015, 23p.

Tabela 2 – Classes de agressividade ambiental – CAA. (Tabela 6.1 da NBR 6118).

Classe de agressividade Ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de Projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana <sup>1,2</sup>	Pequeno
III	Forte	Marinha <sup>1</sup>	Grande
		Industrial <sup>1,2</sup>	
IV	Muito forte	Industrial <sup>1,3</sup>	Elevado
		Respingos de maré	

NOTAS: 1) Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).  
 2) Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.  
 3) Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

Tabela 3 – Correspondência entre classe de agressividade ambiental e qualidade do Concreto Armado. (Tabela 7.1 da NBR 6118).

Concreto	Classe de agressividade ambiental (CAA)			
	I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	$\leq 0,65$	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,45$
Classe de concreto (NBR 8953)	$\geq C20$	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C40$

Define-se cobrimento de armadura a espessura da camada de concreto responsável pela proteção da armadura num elemento. Essa camada inicia-se a partir da face mais externa da barra de aço e se estende até a superfície externa do elemento em contato com o meio ambiente. Em vigas e pilares é comum a espessura do cobrimento iniciar na face externa dos estribos da armadura transversal, como mostrado na Figura 39.

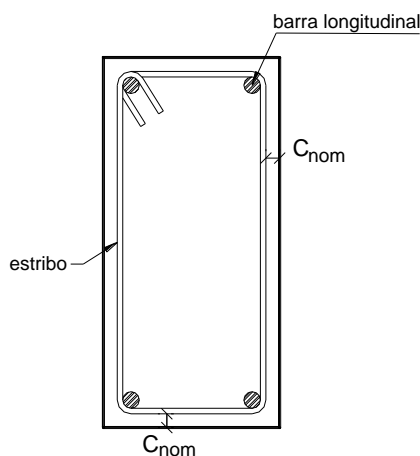


Figura 39 – Espessura do cobrimento da armadura pelo concreto.

A NBR 6118 (item 7.4.7.1) define o cobrimento mínimo da armadura como “o menor valor que deve ser respeitado ao longo de todo o elemento considerado.”

Para garantir o cobrimento mínimo ( $c_{\min}$ ), o projeto e a execução devem considerar o cobrimento nominal ( $c_{\text{nom}}$ ), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução ( $\Delta c$ ). As dimensões das armaduras e os espaçadores devem respeitar os cobrimentos nominais.

$$c_{\text{nom}} = c_{\min} + \Delta c \quad \text{Eq. 56}$$

Nas obras correntes o valor de  $\Delta c$  deve ser maior ou igual a 10 mm. Esse valor pode ser reduzido para 5 mm quando “*houver um controle adequado de qualidade e limites rígidos de tolerância da variabilidade das medidas durante a execução*” das estruturas de concreto, informado nos desenhos de projeto.

A Tabela 4 (NBR 6118, item 7.4.7.2) apresenta valores de cobrimento nominal com tolerância de execução ( $\Delta c$ ) de 10 mm, em função da classe de agressividade ambiental.

Tabela 4 – Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal para  $\Delta c = 10$  mm (Tabela 7.2 da NBR 6118).

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (CAA)			
		I	II	III	IV <sup>2</sup>
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto Armado <sup>4</sup>	Laje <sup>1</sup>	20	25	35	45
	Viga/Pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo <sup>3</sup>	30		40	50

Notas: 1) “Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros tantos, as exigências desta tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal  $\geq 15$  mm.”  
 2) “Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.”  
 3) “No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal  $\geq 45$  mm.”  
 4) Para parâmetros relativos ao Concreto Protendido consultar a Tabela 7.2 da NBR 6118. “No caso de elementos estruturais pré-fabricados, os valores relativos ao cobrimento das armaduras (Tabela 7.2) devem seguir o disposto na ABNT NBR 9062.”<sup>29</sup> (item 7.4.7.7).

“Para concretos de classe de resistência superior ao mínimo exigido, os cobrimentos definidos na Tabela 7.2 podem ser reduzidos em até 5 mm.”, portanto, quando escolhido um concreto de resistência superior ao mínimo exigido conforme a Tabela 3, os cobrimentos da Tabela 4 podem ser reduzidos em 5 mm. A NBR 6118 (itens 7.4.7.5 e 7.4.7.6) ainda estabelece que o cobrimento nominal de uma determinada barra deve sempre ser:

$$c_{\text{nom}} \geq \phi_{\text{barra}} \quad \text{Eq. 57}$$

$$c_{\text{nom}} \geq \phi_{\text{feixe}} = \phi_n = \phi \sqrt{n}$$

A dimensão máxima característica do agregado graúdo ( $d_{\text{máx}}$ ) utilizado no concreto não pode superar em 20 % a espessura nominal do cobrimento, ou seja:

$$d_{\text{máx}} \leq 1,2 c_{\text{nom}} \quad \text{Eq. 58}$$

<sup>29</sup> ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. NBR 9062, ABNT, 2001, 36p.

## 7. CONCEITOS INICIAIS

Neste item são apresentadas algumas definições com o objetivo de auxiliar o entendimento dos métodos do **pilar-padrão com curvatura aproximada** e com **rigidez aproximada**.

### 7.1 Definições

**Pilares** são “Elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes.” (NBR 6118, item 14.4.1.2).

**Pilares-parede** são “Elementos de superfície plana ou casca cilíndrica, usualmente dispostos na vertical e submetidos preponderantemente à compressão. Podem ser compostos por uma ou mais superfícies associadas. Para que se tenha um pilar-parede, em alguma dessas superfícies a menor dimensão deve ser menor que 1/5 da maior, ambas consideradas na seção transversal do elemento estrutural.” (item 14.4.2.4).

Por exemplo, se um elemento de seção retangular tem largura de 20 cm, será pilar se o comprimento não superar 100 cm ( $5 \cdot 20$ ), e pilar-parede se o comprimento for maior que 100 cm (Figura 40). No elemento da Figura 41b, como existem superfícies com comprimento superior a cinco vezes a espessura, trata-se de um pilar-parede.

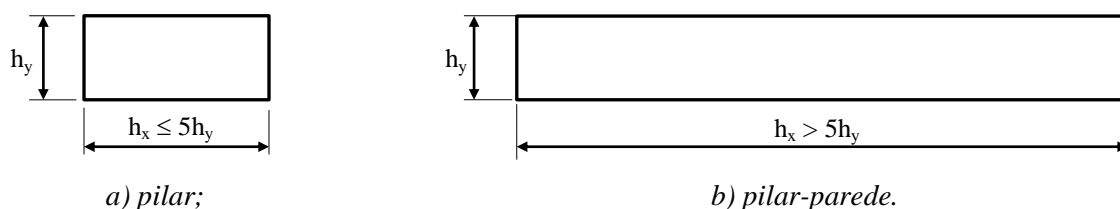


Figura 40 – Definição de pilar e pilar-parede em função das dimensões da seção transversal.

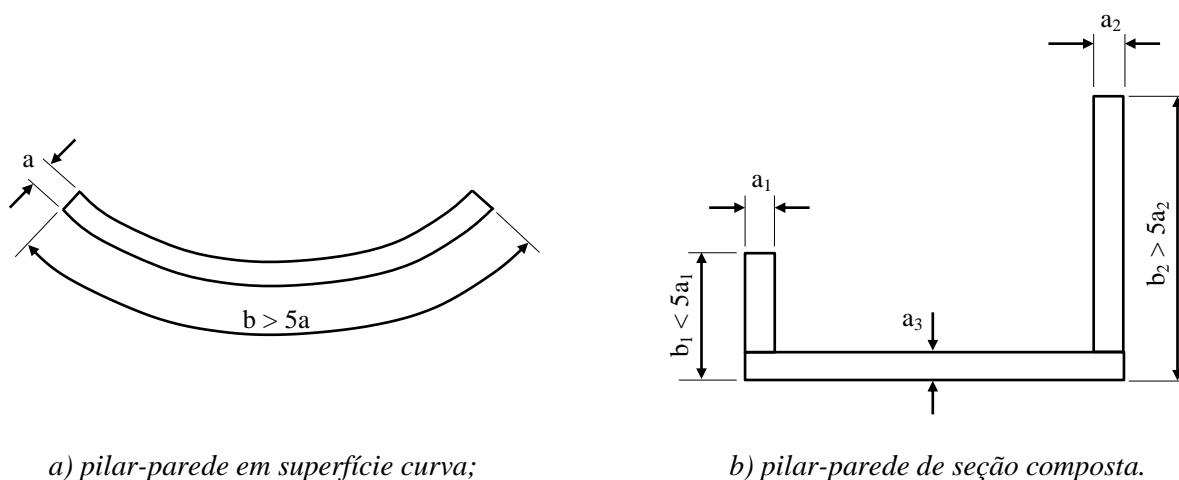


Figura 41 – Exemplos de pilares-paredes.

### 7.2 Flambagem

Elementos submetidos à força normal de compressão podem apresentar deslocamentos laterais, ou flambagem. A máxima força axial que pode atuar em uma coluna, quando ela está no limite da flambagem, é chamada **carga crítica** ( $P_{cr}$ ). E qualquer carga superior à  $P_{cr}$  provocará flambagem na coluna, portanto, deslocamento lateral (Figura 42). Por isso, os pilares devem ser projetados com atenção, de modo que não ocorra flambagem que origine o Estado-Limite Último. A ruína por efeito de flambagem é repentina e violenta, mesmo sem a ocorrência de acréscimos bruscos nas ações aplicadas.

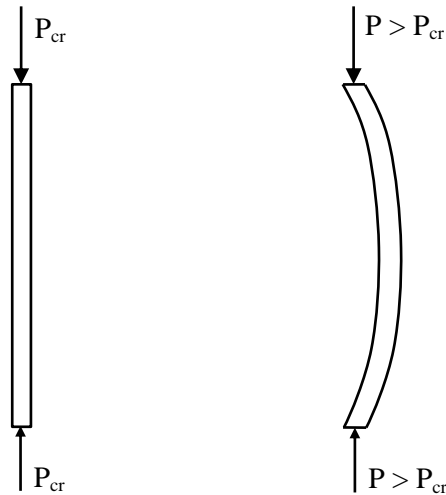


Figura 42 – Flambagem em barra comprimida.

O pilar sob carga axial (coluna) sofrerá flambagem em torno do eixo principal da seção transversal de menor momento de inércia, como ilustrado na Figura 43 para um pilar de seção retangular. Por isso, consegue-se um melhor resultado mantendo os mesmos momentos de inércia em todas as direções, como tubos circulares ou quadrados, ou formas que tenham  $I_x \approx I_y$ .

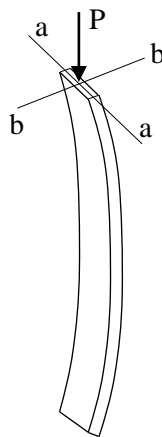
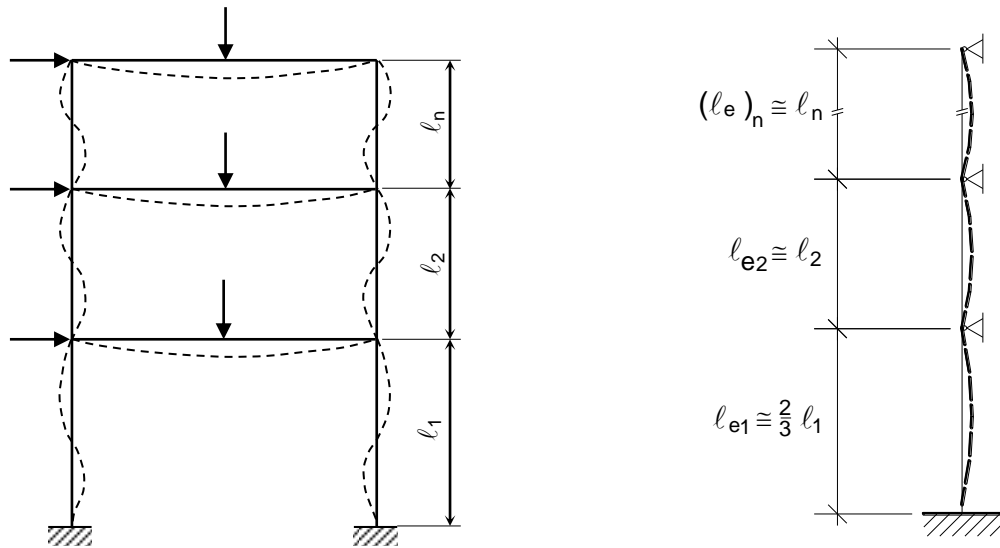


Figura 43 – Flambagem na direção da largura da coluna de seção retangular (Hibbeler, 2004).<sup>30</sup>

### 7.3 Comprimento Equivalente e Índice de Esbeltez

Em edifícios, a linha deformada dos pilares contraventados apresenta-se como mostrada na Figura 44a. A Figura 44b mostra a simplificação geralmente adotada.

<sup>30</sup> HIBBELER, R.C. Resistência dos Materiais. São Paulo, Ed. Pearson Prentice Hall, 5ª ed., 2004, 670p.



a) situação real; b) situação simplificada.  
 Figura 44 – Situação real e simplificada de pilares contraventados de edificações.

A NBR 6118 (15.6) especifica que “Nas estruturas de nós fixos, o cálculo pode ser realizado considerando cada elemento comprimido isoladamente, como barra vinculada nas extremidades aos demais elementos estruturais que ali concorrem, onde se aplicam os esforços obtidos pela análise da estrutura efetuada segundo a teoria de 1ª ordem.” Assim, o **comprimento equivalente**<sup>31</sup> ( $l_e$ , Figura 45), “do elemento comprimido (pilar), suposto vinculado em ambas as extremidades, deve ser o menor dos seguintes valores:

$$l_e \leq \begin{cases} l_o + h \\ l \end{cases}$$

Eq. 59

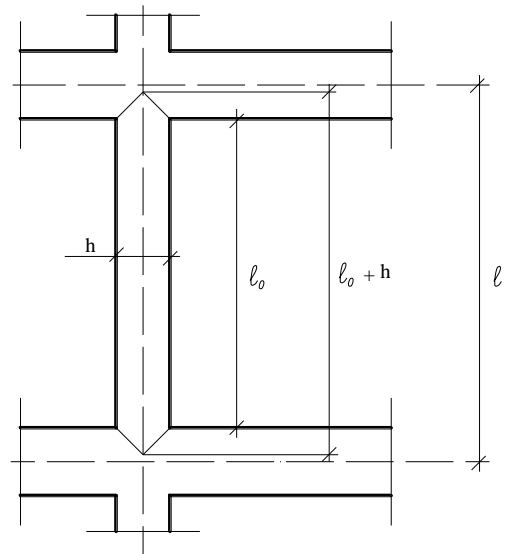


Figura 45 – Valores de  $l_o$  e  $l$ .

$l_o$  = distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar;  
 $h$  = altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo;  
 $l$  = distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.”

O **índice de esbeltez** é a razão entre o comprimento equivalente (de flambagem) e o raio de giração, nas direções a serem consideradas (NBR 6118, 15.8.2):

$$\lambda = \frac{l_e}{i}$$

Eq. 60

<sup>31</sup> Para casos de determinação do comprimento equivalente (ou de flambagem) mais complexos recomendamos a leitura de Süsskind (1984, v.2). O **comprimento equivalente** era chamado comprimento de flambagem na NBR 6118.

com o raio de giração:  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

Para seção **retangular** o índice de esbeltez resulta:

$$\lambda = \frac{\sqrt{12} \ell_e}{h} = \frac{3,46 \ell_e}{h} \quad \text{Eq. 61}$$

$\ell_e$  = comprimento equivalente;

$i$  = raio de giração da seção geométrica da peça (seção transversal de concreto, não se considerando a presença de armadura);

$I$  = momento de inércia;

$A$  = área da seção;

$h$  = dimensão do pilar na direção considerada.

O comprimento equivalente de uma barra isolada depende das vinculações na base e no topo, conforme os esquemas mostrados na Figura 46. Em função do índice de esbeltez máximo, os pilares podem ser classificados como:<sup>32</sup>

- Curto: se  $\lambda \leq 35$ ;
- Médio: se  $35 < \lambda \leq 90$ ;
- Medianamente esbelto: se  $90 < \lambda \leq 140$ ;
- Esbelto: se  $140 < \lambda \leq 200$ .

Eq. 62

Os pilares curtos e médios ( $\lambda \leq 90$ ) representam a grande maioria dos pilares das edificações. Os pilares medianamente esbeltos e esbeltos são pouco frequentes.

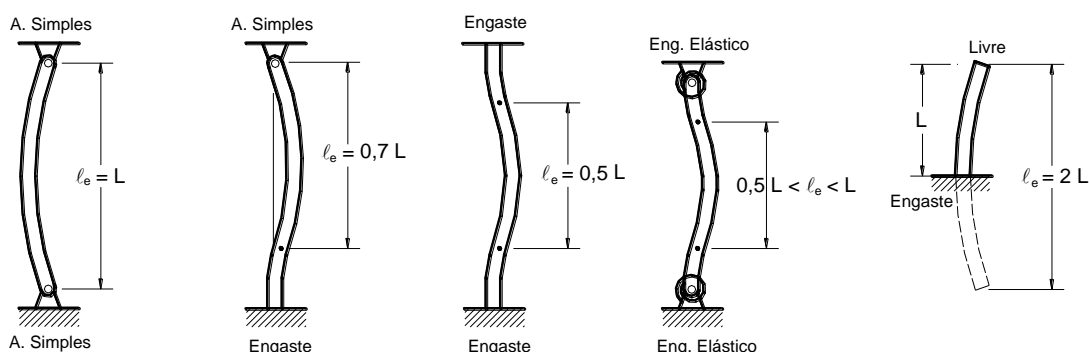


Figura 46 – Comprimento equivalente ( $\ell_e$ ).

## 7.4 Noções sobre Contraventamento de Estruturas

Os edifícios devem ser projetados de modo a apresentar estabilidade às ações verticais e horizontais, ou seja, devem apresentar a chamada “Estabilidade Global”. Na estrutura de uma edificação os pilares são os principais elementos destinados à obtenção da estabilidade global, e em edifícios altos pode ser necessário projetar outros elementos mais rígidos, que além de também transmitirem as ações verticais, garantem a estabilidade horizontal do edifício à ação do vento e de sismos (quando existirem). Ao mesmo tempo, são esses elementos mais rígidos que permitem considerar a indeslocabilidade dos nós dos pilares menos rígidos. Com essas premissas classificam-se os elementos verticais de edifícios em elementos de contraventamento e elementos (pilares) contraventados.

Define-se o sistema de contraventamento como “o conjunto de elementos que proporcionarão a estabilidade horizontal do edifício e a indeslocabilidade ou quase-undeslocabilidade dos pilares contraventados”, que são aqueles que não fazem parte do sistema de contraventamento. A NBR 6118 (item 15.4.3) diz que, “Por conveniência de análise, é possível identificar, dentro da estrutura, subestruturas que,

<sup>32</sup> Até a versão de 2003 da NBR 6118 o limite de 35 era estabelecido como 40 pela antiga NB1/78. Uma outra classificação substituiu o valor 35 por  $\lambda_1$  (apresentado adiante).

devido à sua grande rigidez a ações horizontais, resistem à maior parte dos esforços decorrentes dessas ações. Essas subestruturas são chamadas subestruturas de contraventamento. Os elementos que não participam da subestrutura de contraventamento são chamados elementos contraventados.”

Os elementos de contraventamento são constituídos por pilares de grandes dimensões (pilares-parede ou simplesmente paredes estruturais), por treliças ou pórticos de grande rigidez, núcleos de rigidez, etc., como mostrados na Figura 47.

As lajes dos diversos pavimentos do edifício também podem participar da estabilidade horizontal, ao atuarem como elementos de rigidez infinita no próprio plano (o que se chama diafragma rígido), fazendo a ligação entre elementos de contraventamento formados por pórticos, por exemplo.

Segundo Süsskind (1984, p. 175), “Toda estrutura, independentemente do número de andares e das dimensões em planta, deve ter seu sistema de contraventamento estudado e adequadamente dimensionado.”

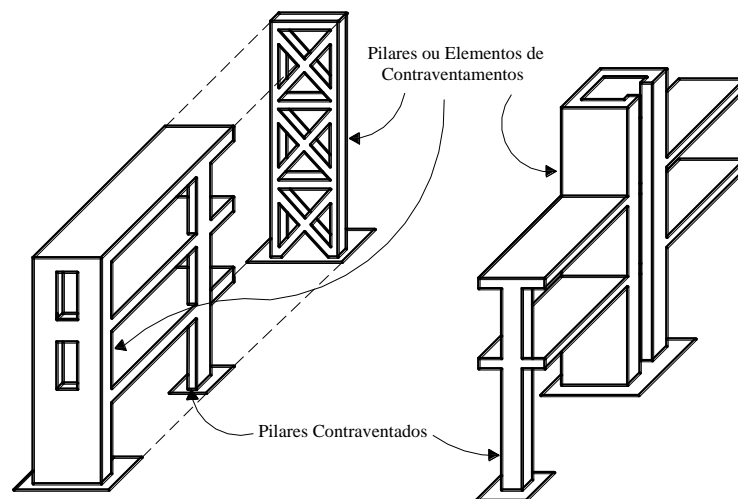


Figura 47 – Pilares contraventados e elementos de contraventamento (Fusco, 1981).

#### 7.4.1 Estruturas de Nós Fixos e Móveis

No item 15.4.2 a NBR 6118 define o que são, para efeito de cálculo, estruturas de nós fixos e de nós móveis. A Figura 49 e a Figura 50 ilustram os tipos.

##### a) Estruturas de nós fixos

São aquelas “quando os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos e, por decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem são desprezíveis (inferiores a 10 % dos respectivos esforços de 1ª ordem), Nessas estruturas, basta considerar os efeitos locais e localizados de 2ª ordem.”

No item 15.4.1 a NBR 6118 apresenta definições de efeitos globais, locais e localizados de 2ª ordem: “Sob a ação das cargas verticais e horizontais, os nós da estrutura deslocam-se horizontalmente. Os esforços de 2ª ordem decorrentes desses deslocamentos são chamados efeitos globais de 2ª ordem. Nas barras da estrutura, como um lance de pilar, os respectivos eixos não se mantêm retilíneos, surgindo aí efeitos locais de 2ª ordem que, em princípio, afetam principalmente os esforços solicitantes ao longo delas.

Em pilares-parede (simples ou compostos) pode-se ter uma região que apresenta não retilineidade maior do que a do eixo do pilar como um todo. Nessas regiões surgem efeitos de 2ª ordem maiores, chamados de efeitos de 2ª ordem localizados (ver Figura 15.3). O efeito de 2ª ordem localizado, além de aumentar nessa região a flexão longitudinal, aumenta também a flexão transversal, havendo a necessidade de aumentar a armadura transversal nessas regiões.” (ver Figura 48).

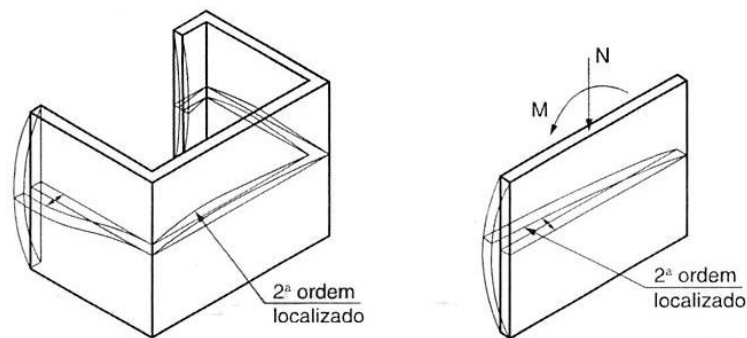


Figura 48 – Efeitos de 2ª ordem localizados (NBR 6118).

### b) Estruturas de nós móveis

São “aquelas onde os deslocamentos horizontais não são pequenos e, em decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem são importantes (superiores a 10 % dos respectivos esforços de 1ª ordem). Nessas estruturas devem ser considerados tanto os esforços de 2ª ordem globais como os locais e localizados.”

As subestruturas de contraventamento podem ser de nós fixos ou de nós móveis, de acordo com as definições acima (Figura 49 e Figura 50).

Para verificar se a estrutura está sujeita ou não a esforços globais de 2ª ordem, ou seja, se a estrutura pode ser considerada como de nós fixos, lança-se mão do cálculo do parâmetro de instabilidade  $\alpha$  (NBR 6118, item 15.5.2) ou do coeficiente  $\gamma_z$  (item 15.5.3). Para mais informações sobre a Estabilidade Global dos edifícios podem ser consultados Fusco (2000) e Süsskind (1984).

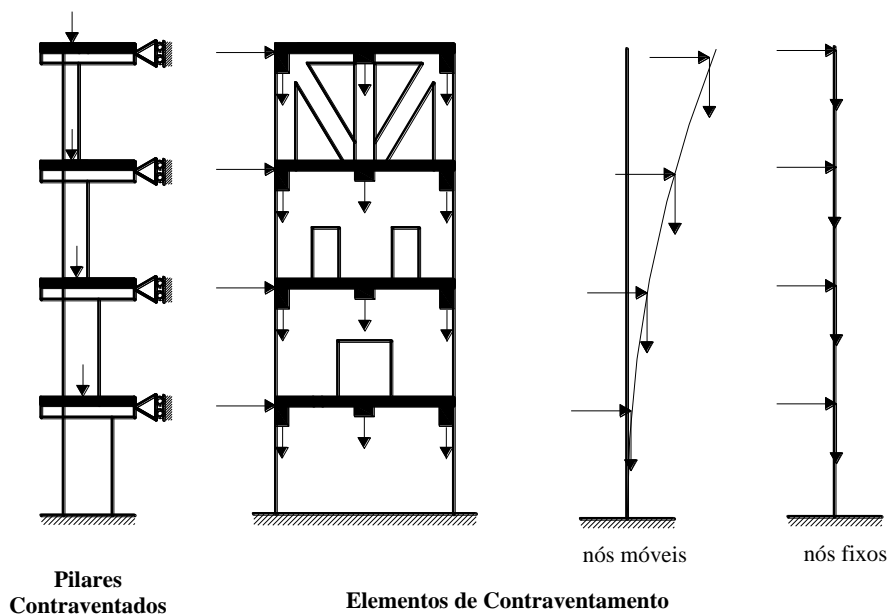


Figura 49 – Pilares contraventados e elementos de contraventamento (Fusco, 1981).

### 7.4.2 Elementos Isolados

A NBR 6118 (item 15.4.4) define que são “considerados elementos isolados os seguintes:

- elementos estruturais isostáticos;
- elementos contraventados;
- elementos que fazem parte de estruturas de contraventamento de nós fixos;
- elementos das subestruturas de contraventamento de nós móveis, desde que, aos esforços nas extremidades, obtidos em uma análise de 1ª ordem, sejam acrescentados os determinados por análise global de 2ª ordem.”

Neste texto são apresentados somente os chamados elementos (pilares) contraventados.

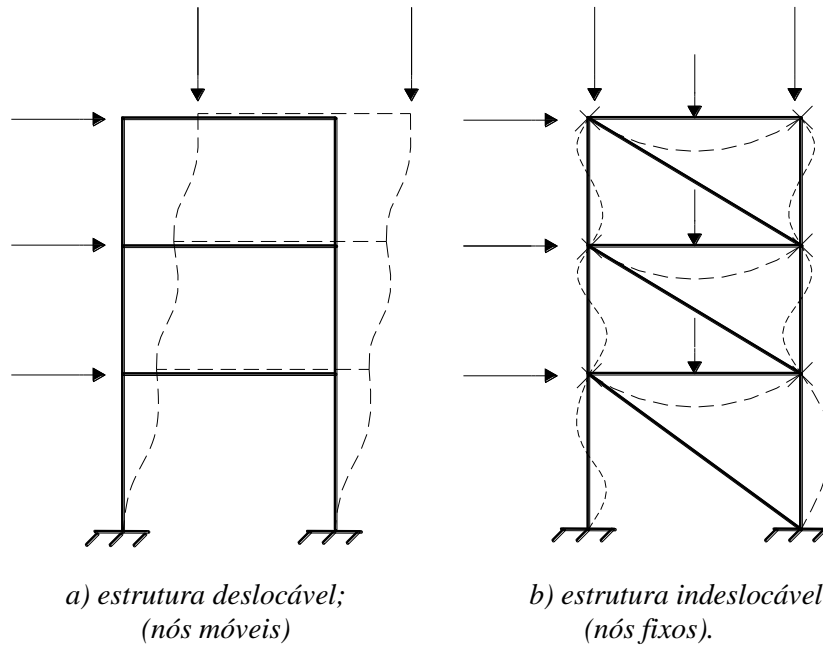


Figura 50 – Estruturas de nós fixos e móveis (Fusco, 1981).

## 7.5 Não Linearidade Física e Geométrica

O conceito de linearidade ou não linearidade consiste em existir, ou não, proporcionalidade entre duas variáveis. Pode ser aplicado às estruturas, aos elementos estruturais e aos materiais. Quando não há proporcionalidade diz-se que há **não** linearidade, como por exemplo, a relação existente entre uma força (aquilo que causa um efeito) e o deslocamento (o efeito), ou também aquela relação muito útil na análise de materiais, a tensão versus deformação.

No dimensionamento de pilares é muito importante considerar duas não linearidades que ocorrem, uma relativa ao material concreto armado (não linearidade física) e outra relativa à geometria do pilar (não linearidade geométrica). As não linearidades podem ser consideradas de maneira aproximada ou rigorosa, conforme os diferentes processos preconizados na NBR 6118.

### a) não linearidade física

A **não linearidade física** refere-se ao material, no caso aqui o Concreto Armado. O material com diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  mostrado na Figura 51a é elástico linear, onde existe proporcionalidade entre a tensão e a deformação, sendo válida a Lei de Hooke, e o material da Figura 51b é não linear.

O **Concreto Simples** apresenta comportamento elastoplástico em ensaios de compressão simples, com um trecho inicial linear até aproximadamente  $0,3f_c$  (Figura 51b). O **Concreto Armado** apresenta comportamento não linear devido aos efeitos da fissuração, fluência do concreto e escoamento da armadura.

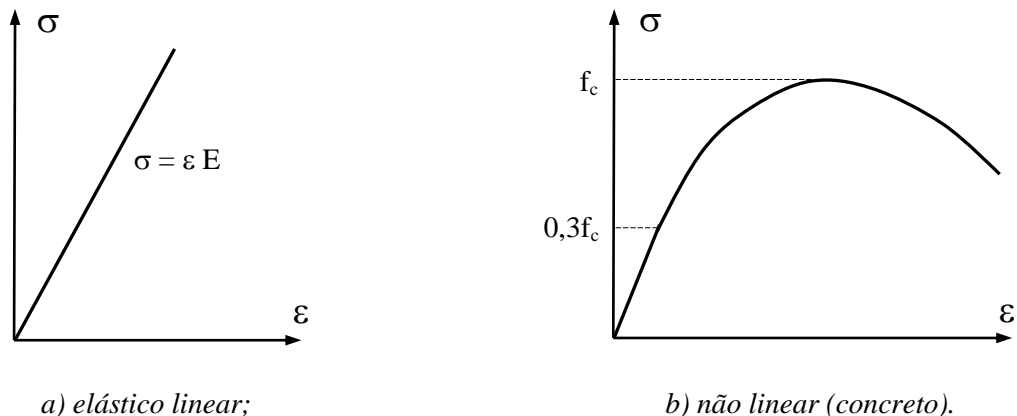


Figura 51 – Exemplos de diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  de um material.

Por exemplo, um pilar armado não esbelto e carregado axialmente, quando submetido a uma carga crescente, o concreto e o aço apresentam variação de tensão como mostradas na Figura 52. No estágio inicial ambos os materiais concreto e aço apresentam comportamento elástico linear, porém, nos estágios mais avançados, o comportamento altera-se para o não linear. Com deformação em torno de 0,2 a 0,3 % (2 a 3 ‰) o concreto alcança a resistência máxima à compressão ( $f_c$ ), e teoricamente a carga máxima que o pilar pode ter. Aumentos adicionais de carga são possíveis apenas com a contribuição do aço. (Nawy, 2005)

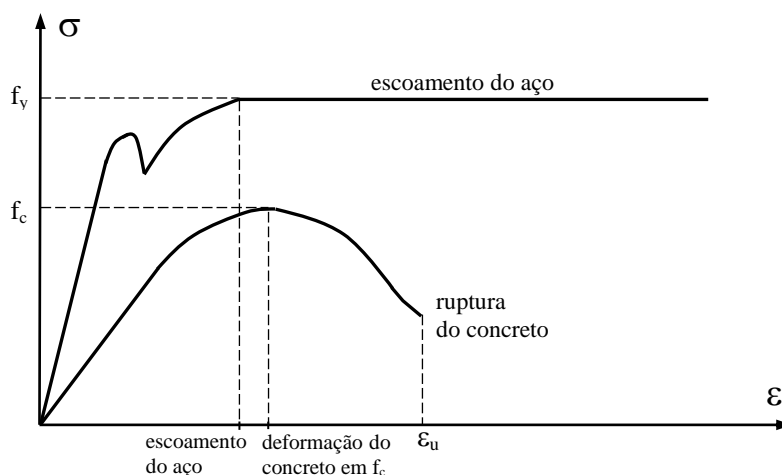


Figura 52 – Comportamento do concreto e do aço em pilar sob compressão simples. (Adaptado de Nawy, 2005)

Quando sob uma força de compressão, o pilar apresenta deslocamentos laterais, que são diretamente afetados pela rigidez dos materiais (concreto e aço), a qual deve ser estimada por meio de processos que considerem a não linearidade física dos materiais.<sup>33</sup>

## b) não linearidade geométrica

Ocorre a **não linearidade geométrica** quando **não** é proporcional a relação entre uma força aplicada em uma estrutura ou elemento e o deslocamento provocado. No caso, por exemplo, do pilar mostrado na Figura 53, o deslocamento máximo horizontal no topo (a) é função da força  $P$ , porém o aumento do deslocamento não é proporcional ao crescimento da força, de modo que se a força  $P$  ultrapassar a força crítica ( $P_{cr}$ ), o deslocamento aumenta rapidamente (Figura 53c). No caso de deslocamentos relativamente grandes, a análise do pilar em sua posição deformada é necessária, pois ocorrem momentos fletores adicionais (denominados de 2ª ordem), como o momento fletor máximo na base do pilar ( $M_2 = P \cdot a$ ). A NBR 6118 (item 15.4.1) define: “*Nas barras da estrutura, como um lance<sup>34</sup> de pilar, os respectivos eixos não se mantêm retilíneos, surgindo aí efeitos locais de 2ª ordem que, em princípio, afetam principalmente os esforços solicitantes ao longo delas.*” Portanto, os pilares têm um comportamento geometricamente não linear, ou seja, a análise do equilíbrio deve ser feita na condição deformada, conforme a chamada **teoria de 2ª ordem**, em que são levados em conta os efeitos dos deslocamentos nos esforços solicitantes.<sup>35</sup>

<sup>33</sup> PINTO, R.S. *Não linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado*. Dissertação (Mestrado), Departamento de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997, 128 f. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1997ME\\_RivellidaSilvaPinto.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1997ME_RivellidaSilvaPinto.pdf)>. Acesso em: 23/03/2020.

<sup>34</sup> Lance é a parte (comprimento) de um pilar relativa ao trecho entre dois pavimentos de uma edificação.

<sup>35</sup> PIRES, S.L. *Análise de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta considerando as não linearidades física e geométrica*. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006, 115p. Disponível em (23/03/2020): [http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/257731/1/Pires\\_SusanadeLima\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/257731/1/Pires_SusanadeLima_M.pdf)

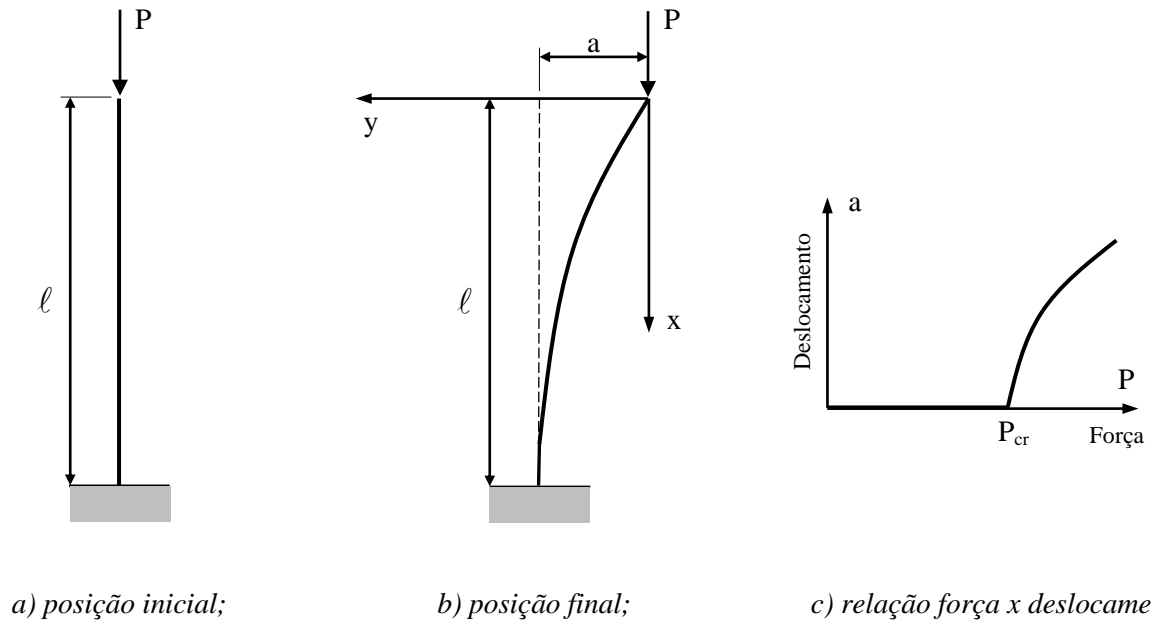


Figura 53 – Não linearidade geométrica de pilar.

No cálculo de pilares com índice de esbeltez máximo 90 a NBR 6118 permite algumas simplificações na avaliação dos momentos fletores de 2ª ordem. No método do **pilar-padrão com curvatura aproximada** a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada supondo-se que a deformação da barra seja **senoidal**, e a não linearidade física é considerada por meio de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica. No método do **pilar-padrão com rigidez aproximada** a não linearidade geométrica é também considerada supondo a forma senoidal, no entanto, a não linearidade física é considerada por meio de uma expressão aproximada da rigidez do pilar. Porém, no caso de pilares esbeltos, as simplificações não são permitidas, e as não linearidades devem ser consideradas de maneira rigorosa por meio do *Método Geral*.

## 7.6 Equação da Curvatura de Elementos Fletidos

Com o intuito de subsidiar o entendimento do **método do pilar-padrão**, apresentado adiante, e da expressão para cálculo do momento fletor de 2ª ordem, apresenta-se em seguida a equação da curvatura de **peças fletidas**.<sup>36</sup> Considerando a Lei de Hooke ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ), a equação da curvatura de uma barra submetida à flexão simples (Figura 54), tem a seguinte dedução, apresentada em Fusco (1981):

$$\widehat{AB} = r \, d\varphi = ds$$

$$\widehat{CD} = (r + y) \, d\varphi = r \, d\varphi + y \, d\varphi = ds + y \, d\varphi$$

O alongamento da fibra  $\widehat{CD}$  é:

$$\widehat{CD} = ds (1 + \varepsilon) = ds + \varepsilon \, ds \quad , \text{ o que resulta:}$$

$$y \, d\varphi = \varepsilon \, ds \quad , \text{ e:}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\varepsilon}{y}$$

Eq. 63

aplicando essa equação às fibras extremas, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_1}{y_1} = \frac{\varepsilon_2}{y_2} > 0$$

pois  $\varepsilon_1 < 0$  e  $y_1 < 0$ , e  $\varepsilon_2 > 0$  e  $y_2 > 0$ , o que resulta:

<sup>36</sup> A equação da curvatura é geralmente estudada na disciplina Resistência dos Materiais.

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{y_2 - y_1} = \frac{\varepsilon_2 + |\varepsilon_1|}{y_2 + |y_1|} = \frac{\varepsilon_2 + |\varepsilon_1|}{h}$$

Para uma **viga de Concreto Armado**, com deformações nas fibras extremas de  $\varepsilon_c$  no concreto comprimido e  $\varepsilon_s$  na armadura tracionada, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} \quad \text{Eq. 64}$$

com  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_s$  em valor absoluto, e  $d$  = altura útil da armadura. A NBR 6118 aplica esta equação no cálculo do momento fletor de 2ª ordem ( $M_2$ ), com as deformações  $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon_c$  substituídas por valores numéricos (ver Eq. 76). Admitindo a linearidade física do material tem-se:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{M}{I} y \quad \text{resulta:} \quad \varepsilon = \frac{M}{EI} y$$

E com a Eq. 63:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. 65}$$

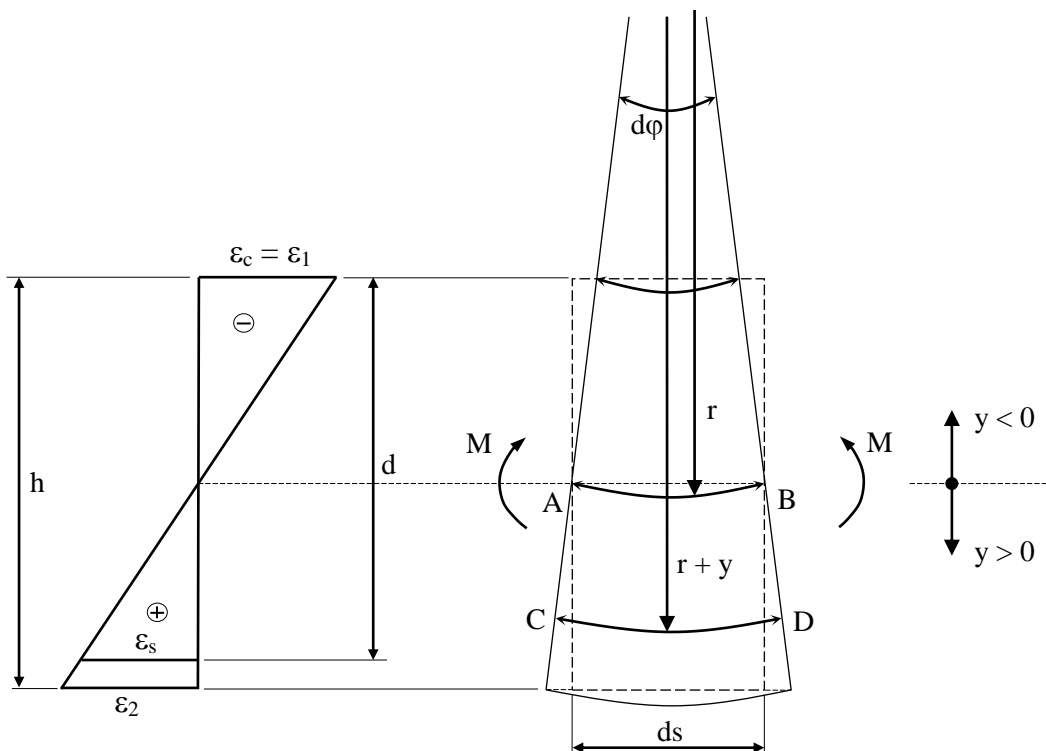


Figura 54 – Curvatura de uma peça sob Flexão Simples.

Da Resistência dos Materiais tem-se a expressão exata da curvatura (linha elástica) de uma viga submetida a duas forças  $F$  (Figura 55):

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Eq. 66

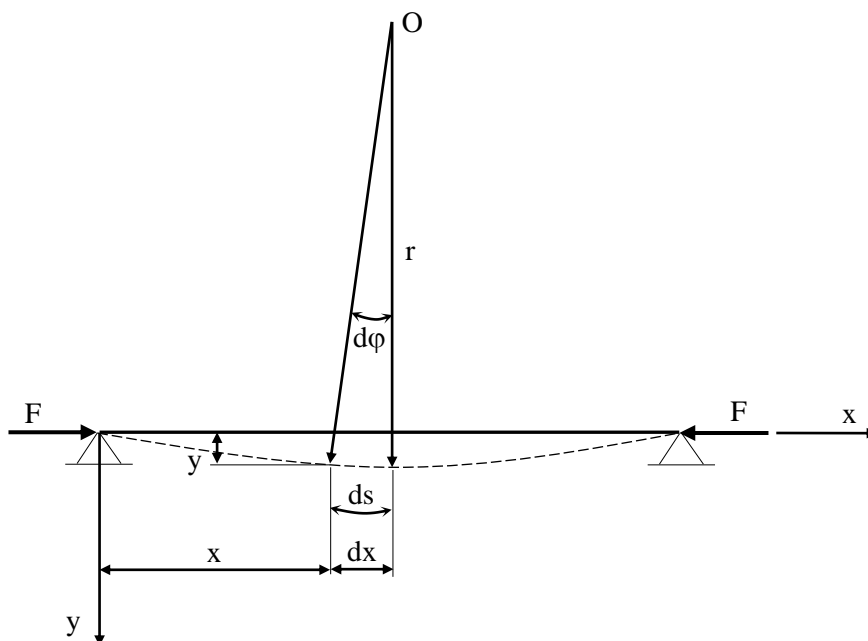


Figura 55 – Linha elástica de uma viga.

Para pequenos deslocamentos (pequena inclinação) tem-se  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \ll 1$ , o que leva a:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{Eq. 67}$$

Juntando a Eq. 65 e a Eq. 67 encontra-se a equação aproximada para a curvatura:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. 68}$$

## 7.7 Definição de Pilar-Padrão e da Curvatura Aproximada

Como já comentado, nos métodos do **pilar-padrão com curvatura aproximada** e com **rigidez aproximada**, a não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. De modo que neste item apresentam-se a definição do pilar-padrão e a dedução da equação simplificada da deformação de barra comprimida (senoidal), necessária à aplicação dos métodos do pilar-padrão no dimensionamento de pilares.

O **pilar-padrão**<sup>37</sup> é uma simplificação do chamado *Método Geral*<sup>38</sup>, sendo definido como um pilar em balanço (engastado na base e livre no topo), com uma curvatura conhecida que origina no topo o deslocamento horizontal de valor (Figura 56):

$$a = \frac{\ell_e^2}{10} \left(\frac{1}{r}\right)_{\text{base}}$$

<sup>37</sup> É importante salientar que o **Método do pilar-padrão** é aplicável somente a pilares de seção transversal e armadura constantes ao longo do comprimento do pilar.

<sup>38</sup> O **Método Geral**, conforme a NBR 6118 (item 15.8.3.2), “Consiste na análise não linear de 2ª ordem efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação momento-curvatura real em cada seção e consideração da não linearidade geométrica de maneira não aproximada. O método geral é obrigatório para  $\lambda > 140$ .” Geralmente não é estudado em cursos de graduação.

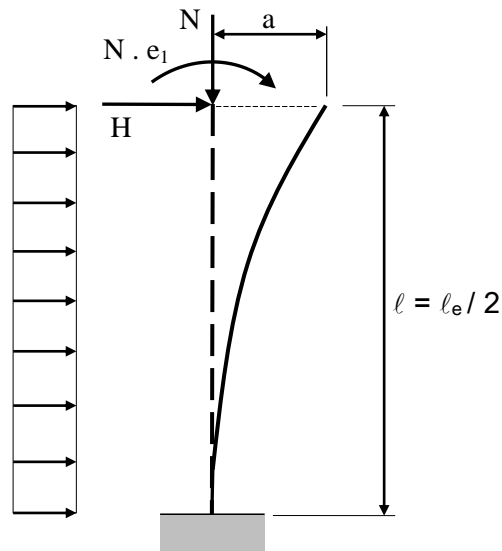


Figura 56 – Pilar-padrão (Fusco, 1981).

No pilar-padrão é admitida que o deslocamento  $a$  seja uma função linear da curvatura na base do pilar. A dedução da equação simplificada da deformação (senoidal) do pilar-padrão, como mostrado na Figura 57, é como segue. Como definida na Eq. 67, a equação aproximada da curvatura é:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2 y}{dx^2}$$

O momento fletor externo solicitante é  $M_{\text{ext}} = N \cdot y$ .

Considerando a Eq. 68 ( $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ ), com material elástico linear, e fazendo o equilíbrio entre o momento fletor externo e o momento fletor interno ( $M_{\text{ext}} = M_{\text{int}}$ ) tem-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{N}{EI} y = -k^2 y \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

com  $k^2 = N/EI$ .

A solução geral para a equação diferencial tem a forma:

$$y = C_1 \text{sen } kx + C_2 \text{cos } kx \quad \text{Eq. 69}$$

As condições de contorno para definição das constantes  $C_1$  e  $C_2$  são:

$$\text{a) para } x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0$$

$$\therefore C_2 = 0$$

A Eq. 69 simplifica-se para:

$$y = C_1 \text{sen } kx$$

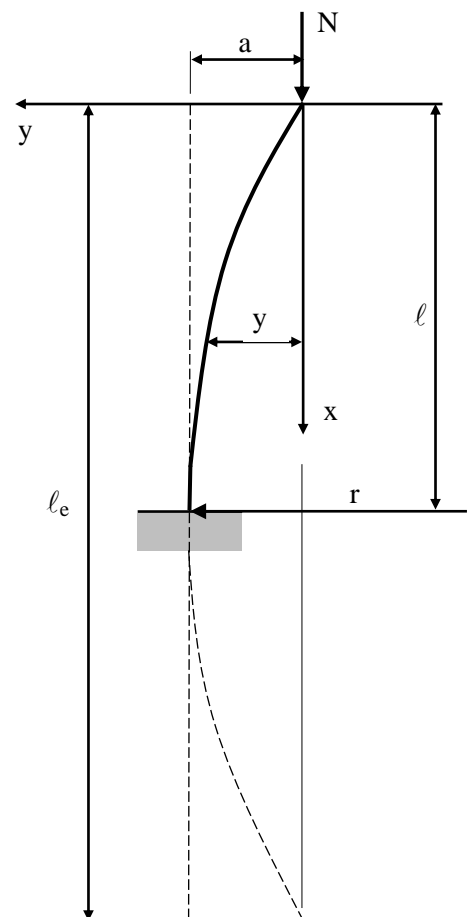


Figura 57 – Curvatura de uma barra comprimida engastada na base e livre no topo.

$$\text{Eq. 70}$$

$$\text{b) para } x = \ell \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\ell} = \left. k C_1 \cos k x \right|_{x=\ell} = k C_1 \cos k \ell = 0 \quad \text{Eq. 71}$$

Para barra fletida, a constante  $C_1$  na Eq. 71 deve ser diferente de zero, o que leva a:

$$\cos k \ell = 0 \quad \rightarrow \quad k \ell = \pi/2 \quad \rightarrow \quad k = \pi/2\ell$$

A Eq. 70 toma a forma:

$$y = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2\ell} x \quad \text{Eq. 72}$$

Para  $x = \ell$ , o deslocamento  $y$  é igual ao deslocamento máximo  $a$  (ver Figura 57). Portanto, aplicando a Eq. 72:

$$y = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = a \quad , \text{ donde resulta que } C_1 = a$$

Sendo  $2\ell = \ell_e$  ( $\ell_e$  = comprimento equivalente<sup>39</sup>) e com a determinação da constante  $C_1$ , define-se a equação simplificada para a curvatura (deformação) da barra comprimida, uma função senoidal:

$$y = a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell_e} \quad \text{Eq. 73}$$

Chamando o deslocamento horizontal máximo  $a$  como a excentricidade de 2ª ordem ( $e_2$ ), a equação fica:

$$y = e_2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell_e}$$

A primeira e a segunda derivada da equação fornecem:

$$\frac{dy}{dx} = e_2 \frac{\pi}{\ell_e} \cos \frac{\pi}{\ell_e} x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -e_2 \left( \frac{\pi}{\ell_e} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell_e}$$

E fazendo  $x = \ell$  (sendo  $\ell_e = 2\ell$ ):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e_2 \frac{\pi^2}{\ell_e^2}$$

Eliminando o sinal negativo e considerando a Eq. 67 ( $\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2}$ ), com  $1/r$  relativo à seção crítica (base)

tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e_2 \frac{\pi^2}{\ell_e^2} = \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{base}}$$

Com  $\pi^2 \cong 10$ , o deslocamento no topo da barra é:<sup>40</sup>

<sup>39</sup> A NBR 6118 passou a denominar como “comprimento equivalente” o antes denominado “comprimento de flambagem”.

<sup>40</sup> Fusco (1981, p. 182) apresenta a excentricidade  $e_2$  de maneira mais simples, partindo da equação senoidal para a curvatura.

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{base}} \quad \text{Eq. 74}$$

Devido à excentricidade local de 2ª ordem ( $e_2$ ) surge o chamado momento fletor de 2ª ordem:

$$M_{2d} = N_d \cdot e_2 = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{base}} \quad \text{Eq. 75}$$

“A verificação da segurança é feita arbitrando-se deformações  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_s$  tais que não ocorra o Estado-Limite Último de ruptura ou alongamento plástico excessivo na seção mais solicitada da peça.” (Fusco, 1981). Tomando a Eq. 64 e considerando aço CA-50,  $\gamma_s = 1,15$  e  $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰} = 0,0035$ , pode-se determinar o valor da curvatura  $1/r$  na base do pilar-padrão:

$$\left( \frac{1}{r} \right)_{\text{base}} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} = \frac{0,0035 + \frac{f_{yd}}{E_s}}{d} = \frac{0,0035 + \frac{50/1,15}{21000}}{d} = \frac{0,0035 + 0,00207}{d} = \frac{0,00557}{d}$$

A NBR 6118 (item 15.8.3.3.2) toma uma expressão aproximada para a **curvatura na base**, como:

$$\left( \frac{1}{r} \right)_{\text{base}} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad \text{Eq. 76}$$

com  $v$  (ni) sendo um valor adimensional relativo à força normal ( $N_d$ ):<sup>41</sup>

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad \text{Eq. 77}$$

$h$  = altura da seção na direção considerada;

$A_c$  = área da seção transversal;

$f_{cd}$  = resistência de cálculo do concreto à compressão ( $f_{ck}/\gamma_c$ ).

## 8. EXCENRICIDADES

Neste item são apresentadas outras excentricidades além da excentricidade de 2ª ordem, que podem ocorrer no dimensionamento dos pilares: excentricidade de 1ª ordem, excentricidade acidental e excentricidade devida à fluência.

### 8.1 Excentricidade de 1ª Ordem

A **excentricidade de 1ª ordem** ( $e_1$ )<sup>42</sup> é devida aos esforços solicitantes de 1ª ordem, que são aqueles existentes na estrutura **não deformada**, e pode ocorrer devido à existência de momentos flettores solicitantes ao longo do lance do pilar, independentes da força normal, ou devido ao ponto teórico de aplicação da força normal não coincidir com o centro de gravidade (CG) da seção transversal, ou seja, quando existe uma excentricidade inicial (**a**). Considerando a força normal  $N$  e a existência ou não de momento fletor de 1ª ordem ( $M_1$ , independente de  $N$ ), na Figura 58 são mostrados casos possíveis da excentricidade de 1ª ordem.

<sup>41</sup> A equação do valor adimensional  $v$  foi inicialmente apresentada no item 3.4.

<sup>42</sup> A excentricidade de primeira ordem pode ocorrer tanto na direção  $x$  como na direção  $y$  do pilar.

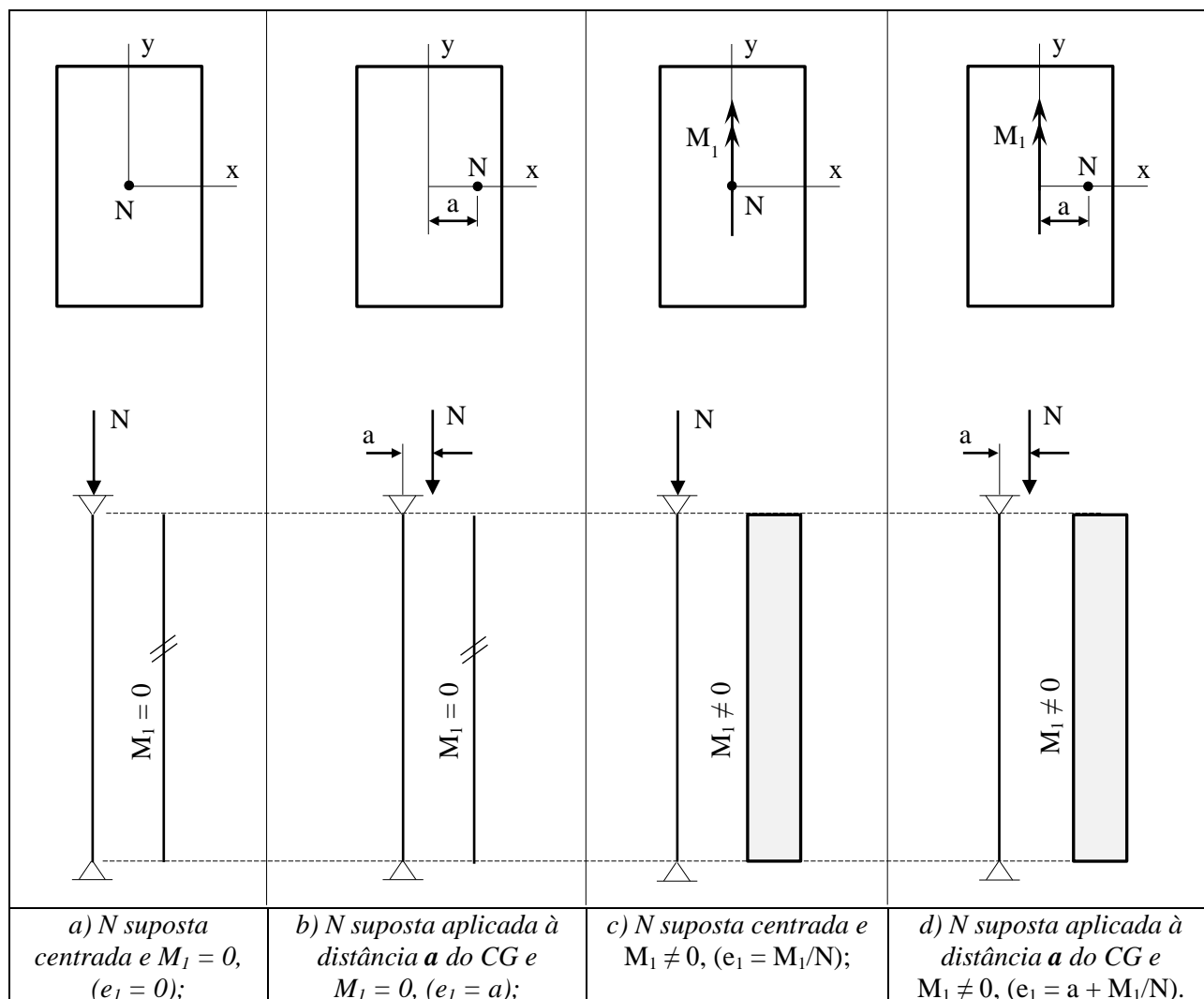


Figura 58 – Casos de excentricidade de 1ª ordem ( $M_1$  suposto zero ou constante).

## 8.2 Excentricidade Acidental

Segundo a NBR 6118 (11.3.3.4), “Na verificação do estado-limite último das estruturas reticuladas, devem ser consideradas as imperfeições geométricas do eixo dos elementos estruturais da estrutura descarregada. Essas imperfeições podem ser divididas em dois grupos: **imperfeições globais** e **imperfeições locais**.” E no item 11.3.3.4.2: “No caso do dimensionamento ou verificação de um lance de pilar, deve ser considerado o efeito do **desaprumo** ou da **falta de retilineidade** do eixo do pilar [...]. Admite-se que, nos casos usuais de estruturas reticuladas, a consideração apenas da falta de retilineidade ao longo do lance de pilar seja suficiente.”<sup>43</sup>

Para determinar a **excentricidade acidental**, antes é necessário calcular o ângulo relativo ao desaprumo da estrutura reticulada da edificação. No item 11.3.3.4.1 a NBR 6118 estabelece “Na análise global dessas estruturas, sejam elas contraventadas ou não, deve ser considerado um desaprumo dos elementos verticais.” A imperfeição geométrica global pode ser avaliada pelo ângulo  $\theta_1$ , conforme a Figura 59:<sup>44</sup>

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} \quad \text{Eq. 78}$$

H = altura total da edificação, expressa em metros (m);

$\theta_{1\text{mín}} = 1/300$  para estruturas reticuladas e imperfeições locais;<sup>45</sup>

<sup>43</sup> A norma deixa claro que a imperfeição geométrica local pode ser considerada apenas com a falta de retilineidade do pilar.

<sup>44</sup> As fórmulas para cálculo da imperfeição global, bem como da excentricidade acidental, constam do Eurocode 2. Na NBR 6118 há outras prescrições relativas à imperfeição global, não apresentadas neste texto.

<sup>45</sup> A NBR 6118 especifica o valor mínimo para a imperfeição local, porém, o valor máximo não está especificado para a imperfeição local.

$$\theta_{1\text{máx}} = 1/200$$

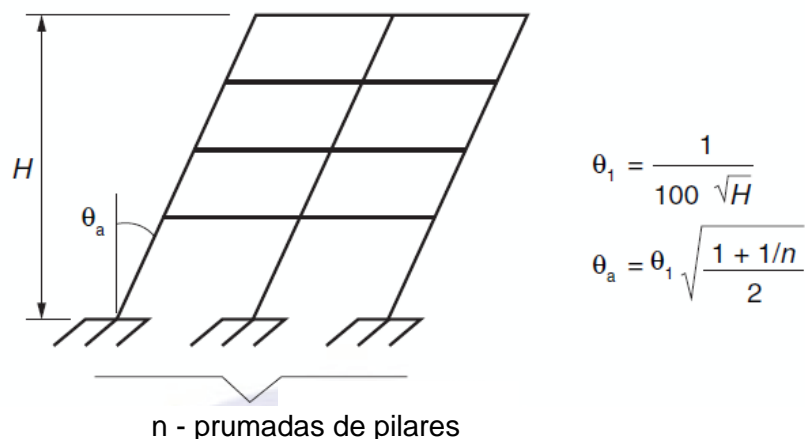


Figura 59 – Imperfeições geométricas globais (Figura 11.1 da NBR 6118).

“Para pilares isolados em balanço, deve-se adotar  $\theta_1 = 1/200$ .”

A excentricidade acidental por **falta de retilineidade** é (Figura 60b):<sup>46</sup>

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \quad \text{Eq. 79}$$

A excentricidade acidental por **desaprumo** do pilar é (Figura 60c):<sup>47</sup>

$$e_a = \theta_1 \cdot \ell_e \quad \text{Eq. 80}$$

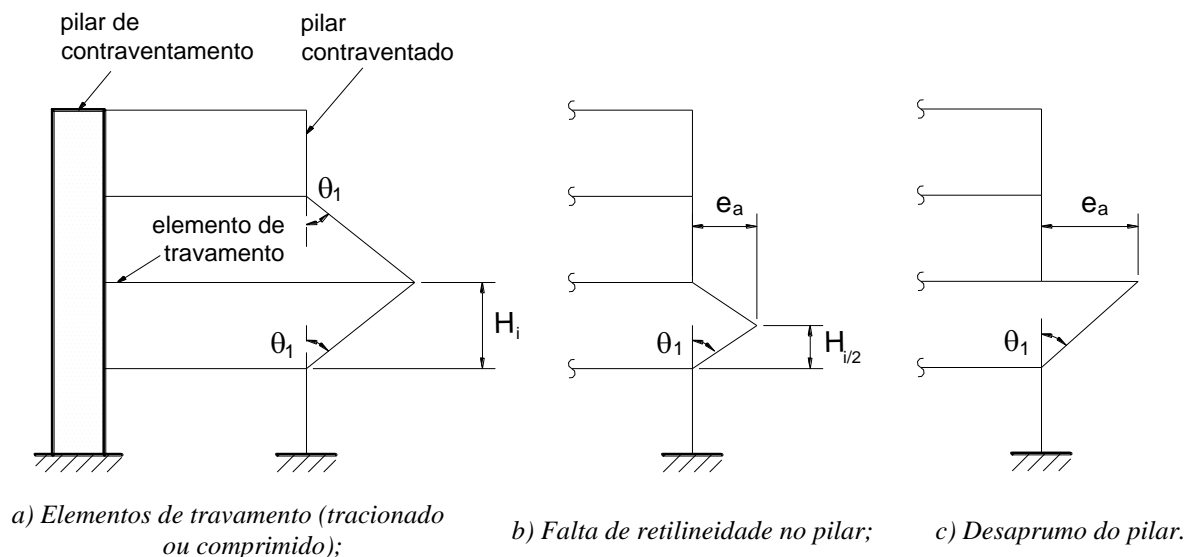


Figura 60 – Imperfeições geométricas locais (Figura 11.2 da NBR 6118).

No cálculo dos pilares a imperfeição geométrica local considerada por meio da excentricidade acidental pode ser substituída por um momento fletor mínimo, como será mostrado no item 10.1.1.

Relativamente à situação de elementos de travamento, como mostrada na Figura 60a, a NBR 6118 (11.3.3.4.2) prescreve: “No caso de elementos que ligam pilares contraventados a pilares de

<sup>46</sup> A NBR 6118 mostra a altura  $H_i$ , porém não a define. No Eurocode 2 a excentricidade acidental é calculada em função do comprimento equivalente ( $\ell_e$ ), e assim será feito neste texto.

<sup>47</sup> A antiga NB 1/78 avaliava a excentricidade acidental como  $e_a \geq h/30$ , com valor mínimo de 2 cm. A NBR 6118, a partir da versão de 2003, modificou o valor da excentricidade acidental conforme os critérios apresentados.

contraventamento, usualmente vigas e lajes, deve ser considerada a tração decorrente do desaprumo do pilar contraventado.”

### 8.3 Excentricidade de 2ª Ordem Local e Valor-Limite $\lambda_1$

Conforme a NBR 6118 (item 15.7.4). “A análise global de 2ª ordem fornece apenas os esforços nas extremidades das barras, devendo ser realizada uma análise dos **efeitos locais de 2ª ordem** ao longo dos eixos das barras comprimidas, de acordo com o prescrito em 15.8. Os elementos isolados, para fins de verificação local, devem ser formados pelas barras comprimidas retiradas da estrutura, com comprimento  $\ell_e$ , de acordo com o estabelecido em 15.6, porém aplicando-se às suas extremidades os esforços obtidos através da análise global de 2ª ordem.”

Nos métodos do **pilar-padrão com curvatura aproximada e com rigidez aproximada** os **efeitos locais de 2ª ordem** são avaliados por meio da excentricidade máxima de 2ª ordem ( $e_2$ ), que origina o momento fletor de 2ª ordem ( $M_2$ ), como mostrados na Eq. 74 e Eq. 75.

E no item 15.8.2 da NBR 6118: “Os **esforços locais de 2ª ordem** em elementos isolados podem ser desprezados quando o índice de esbeltez for menor que o valor-limite  $\lambda_1$  [...]. O valor de  $\lambda_1$  **depende de diversos fatores**, mas os preponderantes são:

- a excentricidade relativa de 1ª ordem  $e_1/h$  na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1ª ordem de maior valor absoluto;
- a vinculação dos extremos da coluna isolada;
- a forma do diagrama de momentos de 1ª ordem.”

O valor-limite  $\lambda_1$  é:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \quad \text{com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90 \quad \text{Eq. 81}$$

$e_1$  = excentricidade de 1ª ordem (não inclui a excentricidade acidental  $e_a$ );

$e_1/h$  = excentricidade relativa de 1ª ordem.

No item 15.8.1 da NBR 6118 encontra-se que o pilar deve ser do tipo **isolado**, e de **seção e armadura constantes ao longo do eixo longitudinal**, submetidos à flexo-compressão. “Os pilares devem ter índice de esbeltez menor ou igual a 200 ( $\lambda \leq 200$ ). Apenas no caso de elementos pouco comprimidos com força normal menor que  $0,10f_{cd} A_c$ , o índice de esbeltez pode ser maior que 200. Para pilares com índice de esbeltez superior a 140, na análise dos efeitos locais de 2ª ordem, devem-se multiplicar os esforços solicitantes finais de cálculo por um coeficiente adicional  $\gamma_{nl} = 1 + [0,01(\lambda - 140)/1,4]$ .”

O valor de  $\alpha_b$  deve ser obtido conforme estabelecido a seguir (NBR 6118, 15.8.2):

“a) para pilares biapoiados sem cargas transversais:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A}, \quad \text{e } 0,4 \leq \alpha_b \leq 1,0 \quad \text{Eq. 82}$$

$M_A$  e  $M_B$  são os momentos de 1ª ordem nos extremos do pilar, obtidos na análise de 1ª ordem no caso de estruturas de nós fixos e os momentos totais (1ª ordem + 2ª ordem global) no caso de estruturas de nós móveis. Deve ser adotado para  $M_A$  o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado e para  $M_B$  o sinal positivo, se tracionar a mesma face que  $M_A$ , e negativo, em caso contrário. A Figura 61 ilustra as possibilidades mais comuns de ocorrência dos momentos fletores de 1ª ordem  $M_A$  e  $M_B$  nos pilares.

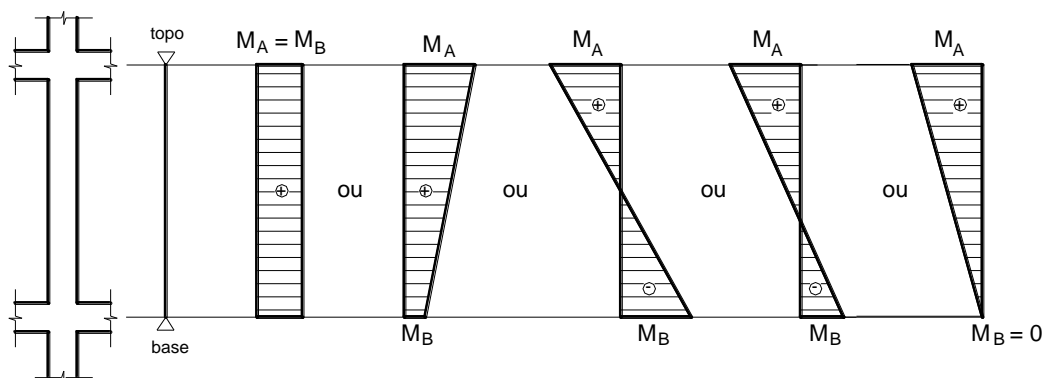


Figura 61 – Ocorrências mais comuns dos momentos fletores de 1ª ordem  $M_A$  e  $M_B$  nos pilares.

b) para pilares biapoiados com cargas transversais significativas ao longo da altura:  $\alpha_b = 1$

c) para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0,8 + 0,2 \frac{M_C}{M_A}, \text{ e } 0,85 \leq \alpha_b \leq 1,0 \quad \text{Eq. 83}$$

$M_A$  = momento de 1ª ordem no engaste;  
 $M_C$  = momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço.

d) para pilares biapoiados ou em balanço com momentos fletores menores que o momento fletor mínimo estabelecido em 11.3.3.4.3:  $\alpha_b = 1$

O fator  $\alpha_b$  consta do ACI 318 (1995) com a notação  $C_m$  (item 10.12.3.1). Porém, ao contrário da NBR 6118, que também considera a excentricidade relativa  $e_1/h$ , tanto o ACI como o Eurocode 2 (1992) e o MC-90 (1990) do CEB, calculam a esbeltez limite em função da razão entre os momentos fletores ou entre as excentricidades nas extremidades do pilar.

#### 8.4 Excentricidade Devida à Fluência

“A consideração da fluência deve obrigatoriamente ser realizada em pilares com índice de esbeltez  $\lambda > 90$  e pode ser efetuada de maneira aproximada, considerando a excentricidade adicional  $e_{cc}$  dada a seguir.” (NBR 6118, 15.8.4)

$$e_{cc} = \left( \frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) \left( 2,718^{\frac{\varphi N_{sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1 \right) \quad \text{Eq. 84}$$

$$N_e = \frac{10 E_{ci} I_c}{\ell_e^2} \quad \text{Eq. 85}$$

$e_a$  = excentricidade devida a imperfeições locais;  
 $M_{sg}$  e  $N_{sg}$  = esforços solicitantes devidos à combinação quase permanente;  
 $\varphi$  = coeficiente de fluência;  
 $E_{ci}$  = módulo de elasticidade tangente;  
 $I_c$  = momento de inércia;  
 $\ell_e$  = comprimento equivalente.

### 9. SITUAÇÕES BÁSICAS DE PROJETO

Para efeito de projeto, os pilares de edifícios podem ser classificados nos seguintes tipos: intermediário, de extremidade e de canto. A cada um desses tipos básicos corresponde uma situação de projeto diferente, dependente do tipo de solicitação que atua no pilar (*Compressão Simples* e *Flexão Composta Normal* ou *Oblíqua*).

### 9.1 Pilar Intermediário

No **pilar intermediário** (Figura 62) considera-se a *Compressão Simples* (também chamada Uniforme ou Centrada) na situação de projeto, pois como as lajes e vigas são contínuas sobre o pilar, pode-se admitir que os momentos fletores transmitidos ao pilar sejam pequenos e desprezíveis. Não existem, portanto, os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  de 1ª ordem nas extremidades do pilar, como descritos no item 8.3.

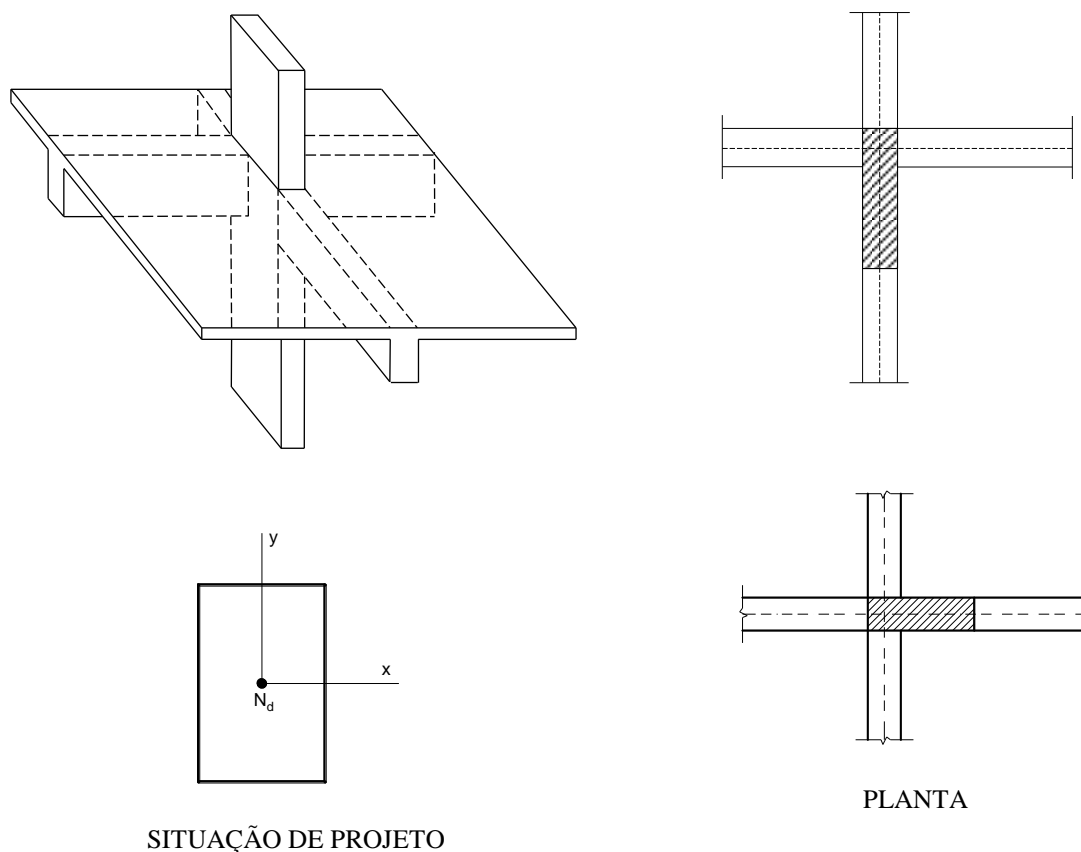


Figura 62 – Arranjo estrutural e situação de projeto de pilar intermediário.

### 9.2 Pilar de Extremidade

O **pilar de extremidade**, de modo geral, encontra-se posicionado nas bordas das edificações, sendo também chamado pilar lateral, de face ou de borda. O termo **pilar de extremidade** advém do fato do pilar ser um apoio extremo para uma viga, ou seja, uma viga que não tem continuidade sobre o pilar, como mostrado na Figura 63. Na situação de projeto ocorre a *Flexão Composta Normal* (FCN), decorrente da não continuidade da viga. Existem, portanto, os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  de 1ª ordem em uma direção do pilar, como descritos no item 8.3.<sup>48</sup> O **pilar de extremidade** não ocorre necessariamente na borda da edificação, isto é, pode ocorrer na zona interior da edificação, desde que uma viga não apresente continuidade sobre ele.

Nas seções de topo e base do pilar podem ocorrer excentricidades  $e_1$  de 1ª ordem, na direção principal x ou y:<sup>49</sup>

$$e_1 = \frac{M}{N} \quad \text{Eq. 86}$$

<sup>48</sup> O momento fletor  $M_B$  pode ser zero.

<sup>49</sup> Nos pilares de extremidade ocorre apenas uma excentricidade inicial, que é na direção da viga não contínua sobre o pilar.

onde  $M$  pode ser o momento fletor  $M_A$  ou  $M_B$ , e  $N$  a força normal de compressão.

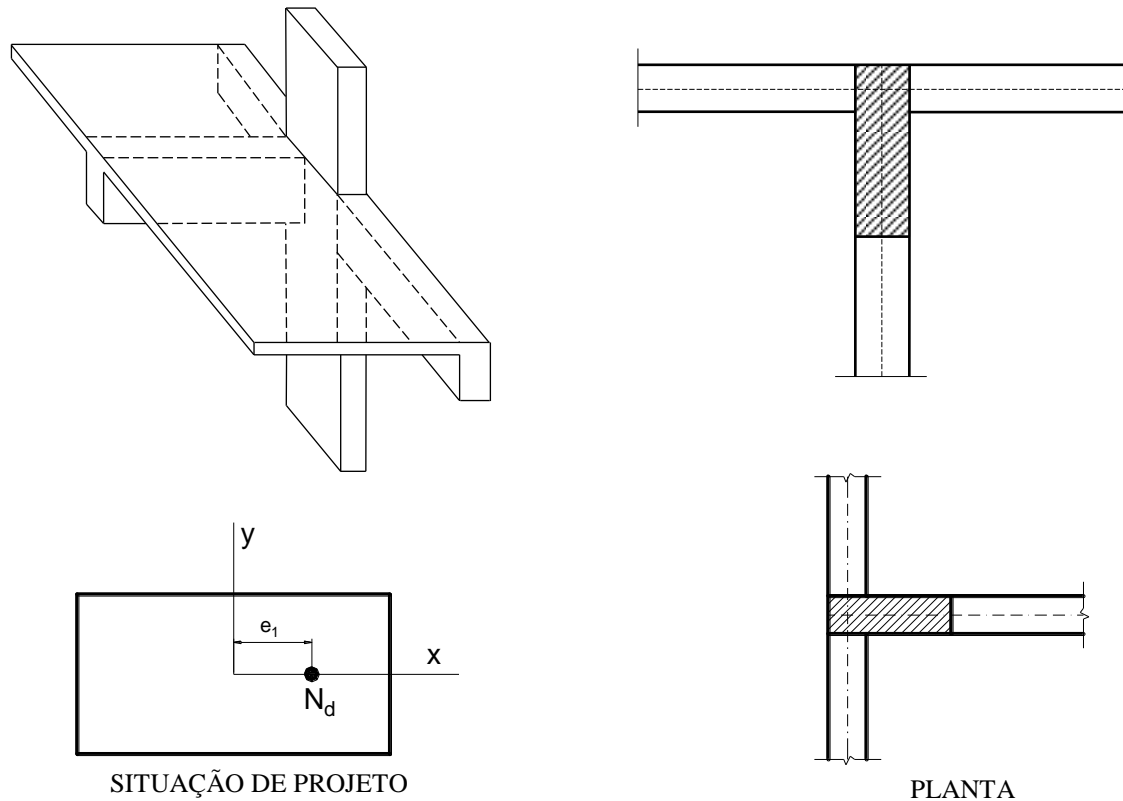


Figura 63 – Arranjo do pilar de extremidade na estrutura real, em planta e situação de projeto.

Os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  são geralmente provenientes da ligação da viga não contínua sobre o pilar, e obtidos calculando-se os pilares em conjunto com as vigas, formando pórticos planos ou espaciais, ou, de uma maneira mais simples e que pode ser feita manualmente,<sup>50</sup> com a aplicação das equações da NBR 6118. Conforme a Figura 64, os momentos fletores, nos lances inferior e superior do pilar, são:

$$M_{\text{inf}} = M_{\text{eng}} \frac{r_{\text{inf}}}{r_{\text{inf}} + r_{\text{sup}} + r_{\text{viga}}} \quad \text{Eq. 87}$$

$$M_{\text{sup}} = M_{\text{eng}} \frac{r_{\text{sup}}}{r_{\text{inf}} + r_{\text{sup}} + r_{\text{viga}}} \quad \text{Eq. 88}$$

$M_{\text{eng}}$  = momento fletor de engastamento perfeito na ligação entre a viga e o pilar;

$r = I/\ell$  = índice de rigidez relativa;

$I$  = momento de inércia da seção transversal do pilar na direção considerada;

$\ell$  = vão efetivo do tramo adjacente da viga ao pilar extremo, ou comprimento de flambagem do pilar.

Na determinação dos momentos fletores de 1ª ordem que ocorrem nos pilares de edifícios de pavimentos deve-se considerar a superposição dos efeitos das vigas dos diferentes níveis (Figura 64). Considerando-se por exemplo o lance (tramo) do pilar compreendido entre os pavimentos  $i$  e  $i + 1$ , os momentos fletores na base e no topo do lance são:

$$M_{\text{base}} = M_{\text{sup},i} + 0,5 M_{\text{inf},i+1} \quad \text{Eq. 89}$$

<sup>50</sup> Ver aplicação em: BASTOS, P.S.S. *Flecha, Fissuração e Dimensionamento de Vigas de Concreto Armado*. Estruturas de Concreto II. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, Set/2021, 165p. Disponível em (23/08/21): [http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)

$$M_{\text{topo}} = M_{\text{inf},i+1} + 0,5 M_{\text{sup},i}$$

Se os pavimentos **i** e **i + 1** forem **pavimentos tipo**, ou seja, idênticos, os momentos fletores na base e no topo serão iguais e:

$$M_{\text{sup},i} = M_{\text{inf},i+1}$$

$$M_{\text{base}} = M_{\text{topo}} = 1,5 M_{\text{sup},i} = 1,5 M_{\text{inf},i+1}$$

Eq. 90

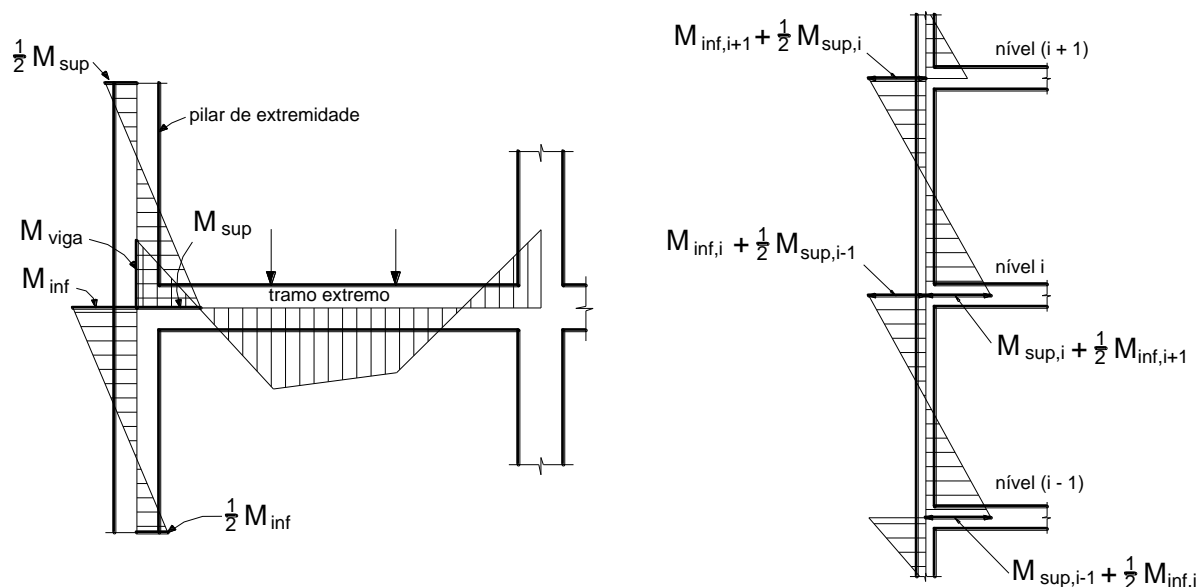


Figura 64 – Momentos fletores nos pilares de extremidade provenientes da ligação com a viga não contínua sobre o pilar (Fusco, 1981).

Os exemplos numéricos apresentados no item 15 mostram o cálculo dos momentos fletores solicitantes por meio da Eq. 87 a Eq. 90.

### 9.3 Pilar de Canto

De modo geral, o **pilar de canto** encontra-se posicionado nos cantos dos edifícios, vindo daí o nome, como mostrado na Figura 65. Na situação de projeto ocorre a *Flexão Composta Oblíqua* (FCO), decorrente da não continuidade de duas vigas no pilar, ou seja, o pilar é um apoio extremo para duas vigas. Existem, portanto, os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  de 1ª ordem, nas duas direções principais do pilar, e consequentemente ocorrem as excentricidades de 1ª ordem  $e_{1x}$  e  $e_{1y}$ , simultaneamente. Os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  podem ser calculados da forma como apresentado nos pilares de extremidade, ou da análise de pórtico plano ou espacial.

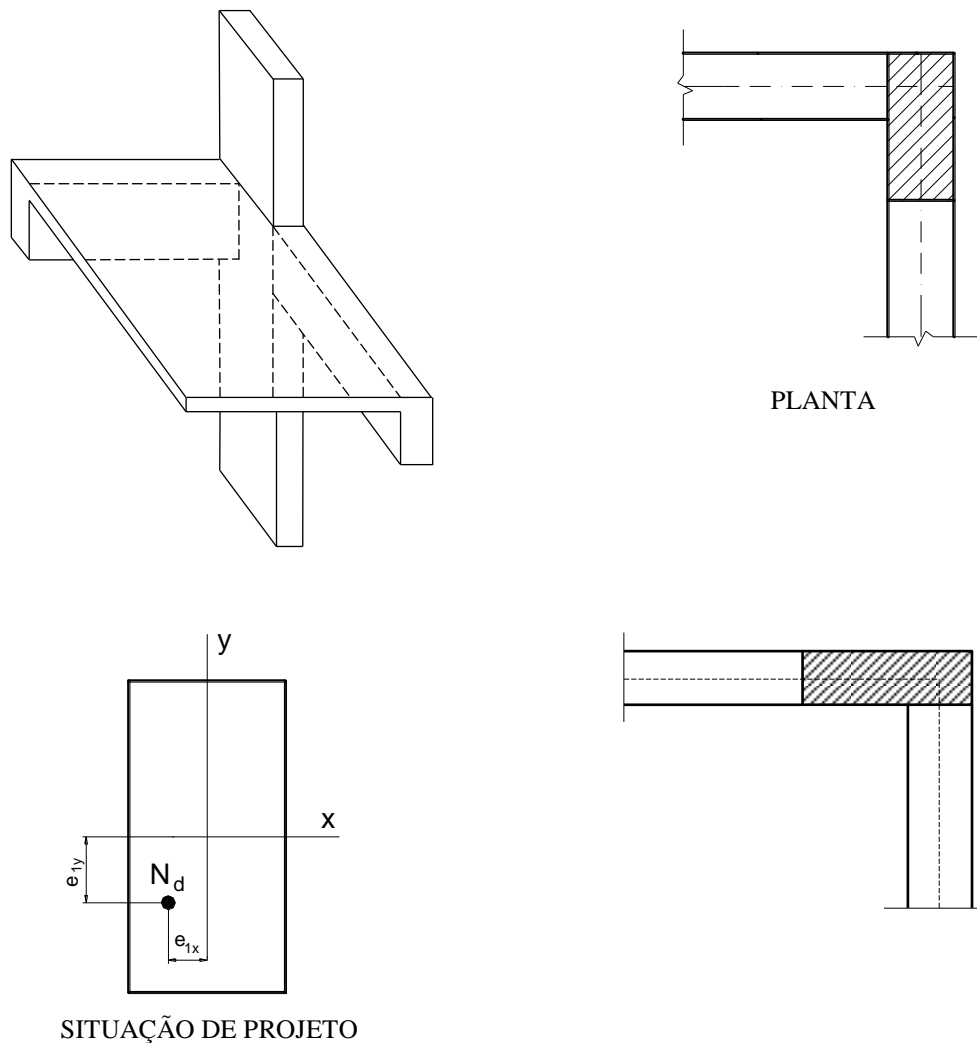


Figura 65 – Arranjo do pilar de canto na estrutura real, em planta e situação de projeto.

## 10. DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR TOTAL

No dimensionamento de um lance de pilar é necessário determinar o momento fletor total (máximo) que atua em cada direção principal (x e y), composto pelos momentos fletores de 1ª e de 2ª ordem:

$$M_{d,tot} = M_{1d} + M_{2d}$$

O momento fletor de 1ª ordem é aquele como mostrado no item 9.2 e Figura 61 e Figura 64, e o momento fletor de 2ª ordem, consequência dos efeitos locais de 2ª ordem, pode ser calculado por diferentes métodos. Conforme a NBR 6118 (15.8.3), o cálculo dos efeitos locais de 2ª ordem pode ser feito pelo **Método Geral** ou por métodos aproximados, sendo o **Método Geral obrigatório para pilares com  $\lambda > 140$**  (ver Tabela 5). Quanto aos métodos aproximados, aplicados em pilares com  $\lambda \leq 90$ , a norma apresenta quatro:

- pilar-padrão com curvatura aproximada (item 15.8.3.3.2);
- pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada (15.8.3.3.3);
- pilar-padrão acoplado a diagramas M, N,  $1/r$  (15.8.3.3.4);
- pilar-padrão para pilares de seção retangular submetidos à *Flexão Composta Oblíqua* (15.8.3.3.5).

Tabela 5 – Exigências da NBR 6118 no projeto de pilares conforme o índice de esbeltez.

Índice de Esbeltez ( $\lambda$ )	Consideração dos Efeitos Locais de 2ª Ordem	Métodos de Cálculo			
		Método Geral	Métodos Aproximados do Pilar-Padrão		
			Com Curvatura Aproximada	Com Rigidez Aproximada	Acoplado a Diagrama M, N, 1/r
$140 < \lambda \leq 200$	Obrigatória	Obrigatório	Não Permitido	Não Permitido	Não Permitido
$90 < \lambda \leq 140$	Obrigatória	–	Não Permitido	Não Permitido	Permitido
$\lambda_1 < \lambda \leq 90$	Obrigatória	–	Permitido	Permitido	–
$0 < \lambda \leq \lambda_1$	–	–	–	–	–

O pilar-padrão foi apresentado no item 7.7. Os dois primeiros métodos aproximados, embora conservadores, são simples e não requerem o uso de programas computacionais, e podem ser aplicados manualmente, sendo por isso aqui apresentados. O método com diagramas M, N, 1/r é laborioso e por isso é necessário o uso de computador.

Nos métodos do *pilar-padrão com curvatura e rigidez aproximadas*, a NBR 6118 prescreve que deve-se considerar a atuação de um **momento fletor mínimo** ( $M_{1d,min}$ ), a ser comparado com os momentos fletores de 1ª ordem. E como opção à aplicação do momento fletor mínimo, a norma possibilita considerar uma **excentricidade acidental** ( $e_a$ ), a fim de levar em conta as imperfeições geométricas locais do pilar (ver item 8.2). Por este motivo, o cálculo dos momentos fletores máximos atuantes no pilar será apresentado neste texto de dois modos: com a consideração do momento fletor mínimo e com a excentricidade acidental em substituição ao momento fletor mínimo.<sup>51</sup>

Outra questão consiste no modo como se faz os cálculos, sendo um com o desenvolvimento de desenhos, e que por ser visual é também didático, e outro modo é com a aplicação das equações da NBR 6118. No caso de uso de desenhos são apresentados dois procedimentos neste texto:

- com os diagramas dos momentos fletores atuantes ao longo do lance do pilar, com o objetivo de visualizar o momento fletor total atuante;
- com os gráficos das excentricidades correspondentes aos momentos fletores,<sup>52</sup> calculadas considerando o momento fletor mínimo ou a excentricidade acidental.

Qualquer que seja o modo de cálculo, os resultados finais são os mesmos. Nos itens seguintes procura-se ilustrar os modos de cálculo, e nos itens 13.1, 13.2 e 13.3 são apresentados exercícios numéricos.

## 10.1 Cálculo com o Momento Fletor Mínimo

O momento fletor mínimo será aplicado aos métodos do **pilar-padrão com curvatura e com rigidez  $\kappa$  aproximadas**. No item seguinte (10.2) é aplicada a excentricidade acidental ( $e_a$ ), como opção ao momento fletor mínimo.

### 10.1.1 Momento Fletor Mínimo

Na versão de 2003, a NBR 6118 introduziu um parâmetro novo no cálculo dos pilares: o momento fletor mínimo, o qual consta no código ACI 318 (2011, item 10.10.6.5):<sup>53</sup> “a esbeltez é levada em consideração aumentando-se os momentos fletores nos extremos do pilar. Se os momentos atuantes no pilar são muito pequenos ou zero, o projeto de pilares esbeltos deve se basear sobre uma excentricidade mínima”, correspondente ao momento fletor mínimo.

A NBR 6118 (11.3.3.4.3) diz que o “efeito das imperfeições locais nos pilares e pilares-parede pode ser substituído, em estruturas reticuladas, pela consideração do momento mínimo de 1ª ordem dado a seguir”:

$$M_{1d,min} = N_d (0,015 + 0,03h) \quad \text{Eq. 91}$$

sendo  $h$  a dimensão total da seção transversal na direção considerada, em metro (m).

<sup>51</sup> A NBR 6118 permite ambos os processos, ficando a escolha a critério do projetista.

<sup>52</sup> Na antiga NB 1/78, o cálculo era feito considerando-se as excentricidades. Já a NBR 6118 de 2003 introduziu a equação do momento fletor total ( $M_{d,tot}$ ), direcionando de certa forma o cálculo por meio dos momentos fletores.

<sup>53</sup> O ACI 318 (2011, p.152) também especifica que o momento fletor mínimo deve ser considerado sobre cada eixo separadamente.

“Nas estruturas reticuladas usuais admite-se que o efeito das imperfeições locais esteja atendido se for respeitado esse valor de momento total mínimo. A este momento devem ser acrescentados os momentos de 2ª ordem definidos na Seção 15.” Portanto, ao se considerar o momento fletor mínimo não há a necessidade de acrescentar a excentricidade acidental ( $e_a$  – ver Figura 60).

Da Eq. 91 define-se a excentricidade mínima:<sup>54</sup>

$$e_{1,\min} = 1,5 + 0,03 h \quad , \text{ com } h \text{ em cm} \quad \text{Eq. 92}$$

### 10.1.2 Método do Pilar-Padrão com Curvatura Aproximada

Conforme a NBR 6118 (15.8.3.3.2), o método pode ser “empregado apenas no cálculo de pilares com  $\lambda \leq 90$ , com seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. A não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.”

A equação senoidal para a linha elástica foi definida na Eq. 73, e a Eq. 74 define a excentricidade máxima de 2ª ordem ( $e_2$ ). A não linearidade física com a curvatura aproximada foi apresentada na Eq. 64 e Eq. 76. O momento fletor de 2ª ordem máximo é calculado com a Eq. 75:

$$M_{2d} = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r}$$

$N_d$  = força normal solicitante de cálculo;

$\ell_e$  = comprimento equivalente;

$1/r$  = curvatura na seção crítica, avaliada pela expressão aproximada (Eq. 76):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

onde  $h$  é a dimensão da seção transversal na direção considerada. A força normal adimensional ( $v$ ) foi definida na Eq. 77:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$$

$A_c$  = área da seção transversal do pilar;

$f_{cd}$  = resistência de cálculo do concreto à compressão ( $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$ ).

A necessidade de considerar ou não os efeitos locais de 2ª ordem (via o momento fletor de 2ª ordem) é avaliada comparando o índice de esbeltez do pilar com o valor limite  $\lambda_1$  (Eq. 81), em cada direção principal, tal que:

se  $\lambda \leq \lambda_1$  → **não há** necessidade de considerar o momento fletor de 2ª ordem na direção (é pequeno e pode ser desprezado).<sup>55</sup>

<sup>54</sup> Na antiga NB 1/78, válida até 2003, o momento fletor mínimo não existia, e as imperfeições locais eram consideradas por meio de uma excentricidade acidental, atuante em cada direção principal do pilar, com o maior valor entre 2,0 cm e  $h/30$ , de modo que até 60 cm a excentricidade a se considerar era de 2,0 cm. A excentricidade mínima igual a 2,0 cm é obtida com a largura de 16,7 cm para o pilar, de modo que para larguras de 14, 15 e 16 cm a excentricidade mínima é um pouco menor que 2,0 cm, e entre 17 e 20 cm a excentricidade mínima é um pouco maior que 2,0 cm. Para pilares de edifícios de pavimentos, com largura comumente de 20 cm, a excentricidade mínima é de 2,1 cm, e como nos pilares retangulares geralmente a armadura final resulta da direção relativa à largura, a armadura calculada com a excentricidade mínima é praticamente igual àquela calculada com a excentricidade acidental da NB 1/78. No caso da NBR 6118, o valor da excentricidade acidental é dependente da altura do pilar, e para 280 cm por exemplo, a excentricidade resulta 0,84 cm, muito menor que 2,1 cm. Portanto, a armadura com a nova excentricidade acidental da norma será muito menor àquelas calculadas com a excentricidade mínima e com a excentricidade acidental da NB 1/78.

<sup>55</sup> O momento fletor de 2ª ordem, no caso de ter que ser considerado, deve ser somado ao maior momento fletor de 1ª ordem solicitante no pilar, que será, caso exista, o momento  $M_A$  (como definido no item 8.3), ou o momento fletor mínimo. A NBR 6118 preconiza que no cálculo de um pilar deve ser considerada a atuação do momento fletor mínimo, constante ao longo da altura do

### 10.1.2.1 Cálculo Via Diagramas de Momentos Fletores ou Excentricidades

A visualização dos diagramas dos momentos fletores (de 1ª e 2ª ordens e o mínimo) ou das excentricidades relativas aos momentos fletores torna o dimensionamento dos pilares mais didático, e auxilia o iniciante no cálculo do momento fletor total (ou máximo) atuante no pilar.

Sendo constante a força normal ( $N_d$ ), no dimensionamento deve ser analisada, segundo as direções principais  $x$  e  $y$ , qual é a seção ao longo da altura do lance que está submetida ao momento fletor máximo. Normalmente basta verificar as seções de extremidade (topo e base) e uma seção intermediária (C), que é aquela onde supõe-se ocorra o momento fletor de 2ª ordem máximo ( $M_{2d,máx}$ ).

O cálculo pode ser feito explicitando os momentos fletores ou as excentricidades correspondentes, conforme os três tipos de pilar: intermediário, de extremidade e de canto, para  $\lambda_{máx} \leq 90$ .

#### a) Pilar Intermediário

O **pilar intermediário** é aquele solicitado à *Compressão Simples* na situação de projeto (S.P. – ver Figura 62), de modo que são nulos os momentos fletores de 1ª ordem ( $M_A$  e  $M_B$ ). A Figura 66 mostra os momentos fletores que podem atuar no pilar ( $M_{1d,mín}$  e  $M_{2d}$ ), e a Figura 67 mostra as excentricidades correspondentes aos momentos fletores. O momento fletor mínimo ( $M_{1d,mín}$ , Eq. 91) deve ser sempre considerado, nas duas direções.<sup>56</sup> O momento fletor de 2ª ordem pode ou não ocorrer, conforme a comparação entre  $\lambda$  e  $\lambda_1$  em cada direção principal ( $x$  e  $y$ ). Se ocorrer  $\lambda \leq \lambda_1$ , a deformação horizontal do pilar pode ser desprezada, pois é pequena, e  $M_{2d} = 0$ .

O momento fletor total ( $M_{d,tot}$ ) máximo em cada direção consiste na soma do momento fletor mínimo com o momento fletor de 2ª ordem, de modo que a seção mais solicitada é uma intermediária (C – onde ocorre o máximo  $M_{2d}$ ). Não ocorrendo  $M_{2d}$ , o pilar deve ser dimensionado apenas para o momento fletor mínimo.<sup>57</sup> Em princípio, para cada momento fletor total deve ser calculada uma armadura longitudinal, sendo adotada a armadura maior.<sup>58</sup>

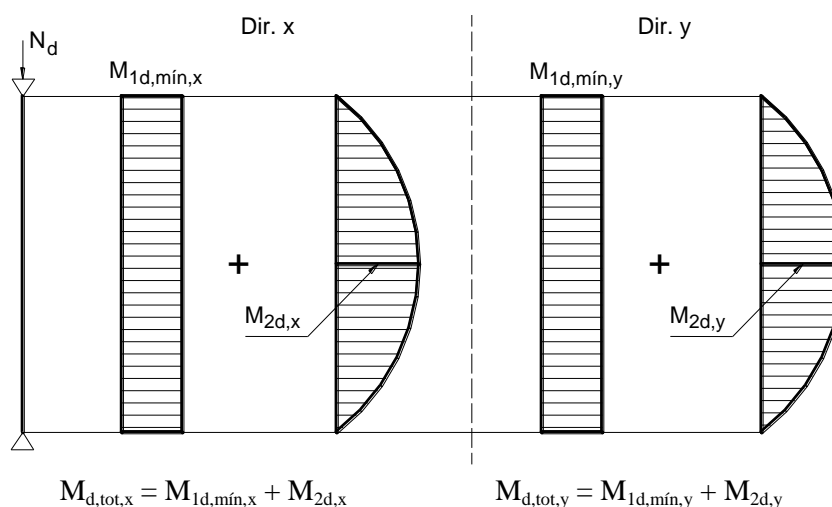


Figura 66 – Momentos fletores atuantes no pilar intermediário com  $\lambda_{máx} \leq 90$ .

pilar, de modo que deve-se ter:  $M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$ . Portanto, mesmo que o momento fletor  $M_A$  não exista, ainda assim o momento fletor mínimo deve ser considerado.

<sup>56</sup> A NBR 6118 não define se o momento fletor mínimo deve ser considerado agir simultaneamente nas duas direções principais do pilar, assim como do mesmo modo também não define essa questão relativamente à excentricidade acidental. No passado a excentricidade acidental foi considerada agir nas duas direções. Quanto ao momento fletor mínimo, a NBR 6118 coloca que, no caso de “pilares de seção retangular, pode-se definir uma envoltória mínima de 1ª ordem, tomada a favor da segurança. Neste caso, a verificação do momento mínimo pode ser considerada atendida quando, no dimensionamento adotado, obtém-se uma envoltória resistente que englobe a envoltória mínima de 1ª ordem.” (item 11.3.3.4.3).

<sup>57</sup> Nas edificações, a maioria dos pilares tem seção retangular, com larguras comumente entre 14 cm (mínima) e 20 cm, de modo que é comum ocorrer o momento fletor de 2ª ordem apenas na direção da largura do pilar, a qual configura a direção crítica.

<sup>58</sup> As armaduras devem ser calculadas com um mesmo arranjo (posicionamento) de barras na seção transversal, importante porque a armadura final deve atender simultaneamente as duas direções principais do pilar.

Como opção ao cálculo com os momentos fletores a Figura 67 explicita as excentricidades e mostra a situação de projeto (S.P.) e as situações de cálculo (s.c.) para a seção intermediária C do **pilar intermediário**. Na 1ª situação de cálculo (1ª s.c.) são indicadas as excentricidades na direção x, e na 2ª s.c. as excentricidades na direção y. Verifica-se que ocorrem duas *Flexões Compostas Normais* (FCN). A excentricidade mínima (correspondente ao momento fletor mínimo) tem o valor  $e_{1,\min} = 1,5 + 0,03h$  (ver Eq. 92). Para cada direção (s.c.) deve ser calculada uma armadura longitudinal, devendo ser adotada a maior.

A consideração ou não da excentricidade de 2ª ordem ( $e_2$ ) depende da comparação entre  $\lambda$  e  $\lambda_1$ . Para  $\lambda \leq \lambda_1$  tem-se  $e_2 = 0$  (em uma dada direção do pilar), e neste caso basta considerar a excentricidade mínima. Se  $\lambda > \lambda_1$ , a excentricidade de 2ª ordem deve ser somada à excentricidade mínima. A excentricidade de 2ª ordem foi definida na Eq. 74 e com a Eq. 76:

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{base}}, \quad \text{com} \quad \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{base}} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

e  $v$  definido na Eq. 77:  $v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$

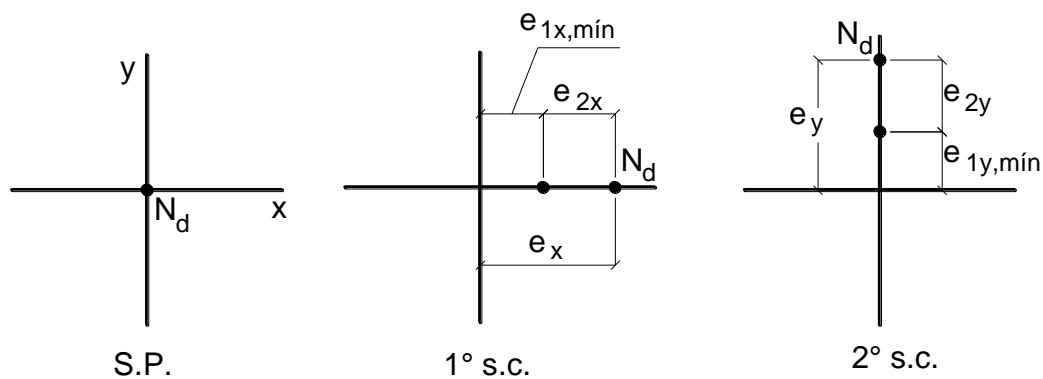


Figura 67 – Situação de projeto e situações de cálculo de pilar intermediário com  $\lambda_{\max} \leq 90$ .

## b) Pilar de Extremidade

No **pilar de extremidade** ocorre a *Flexão Composta Normal* na situação de projeto, com existência de momento fletor de 1ª ordem ( $M_A$  e  $M_B$ ) em uma direção do pilar (x ou y – ver Figura 63). No caso de momento fletor de 1ª ordem variável ao longo da altura do pilar, o valor maior deve ser nomeado  $M_{1d,A}$ , e considerado positivo. O valor menor, na outra extremidade, será nomeado  $M_{1d,B}$ , e considerado negativo se tracionar a fibra oposta à de  $M_{1d,A}$  (ver Figura 61). Como exemplo, no pilar da Figura 68 o momento fletor de 1ª ordem variável está considerado na direção x.

Conforme a Figura 68, o momento fletor total em cada direção pode ocorrer em uma das seções de extremidade (topo ou base, com  $M_{2d} = 0$ ) ou em uma seção intermediária C (onde ocorre o máximo momento fletor de 2ª ordem). O momento de 1ª ordem  $M_{1d,C}$  é avaliado como:

$$M_{1d,C} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A} + 0,4 M_{1d,B} \\ 0,4 M_{1d,A} \end{cases} \quad \text{Eq. 93}$$

A Eq. 93 tem os coeficientes 0,6 e 0,4 relativos à variável  $\alpha_b$ , definida no item 8.3. Na direção x, o momento fletor  $M_{1d,A}$  deve ser comparado com o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\min}$ ), e adotado o maior, ou seja, o momento fletor mínimo não é somado ao momento fletor de 1ª ordem. Na direção y, onde neste exemplo não ocorre momento fletor de 1ª ordem, deve ser considerado o momento fletor mínimo.

Semelhantemente ao pilar intermediário, para cada momento fletor total (direção x e y), deve ser calculada uma armadura longitudinal, considerando-se o mesmo arranjo de barras da armadura na seção transversal. A armadura final adotada será a maior.

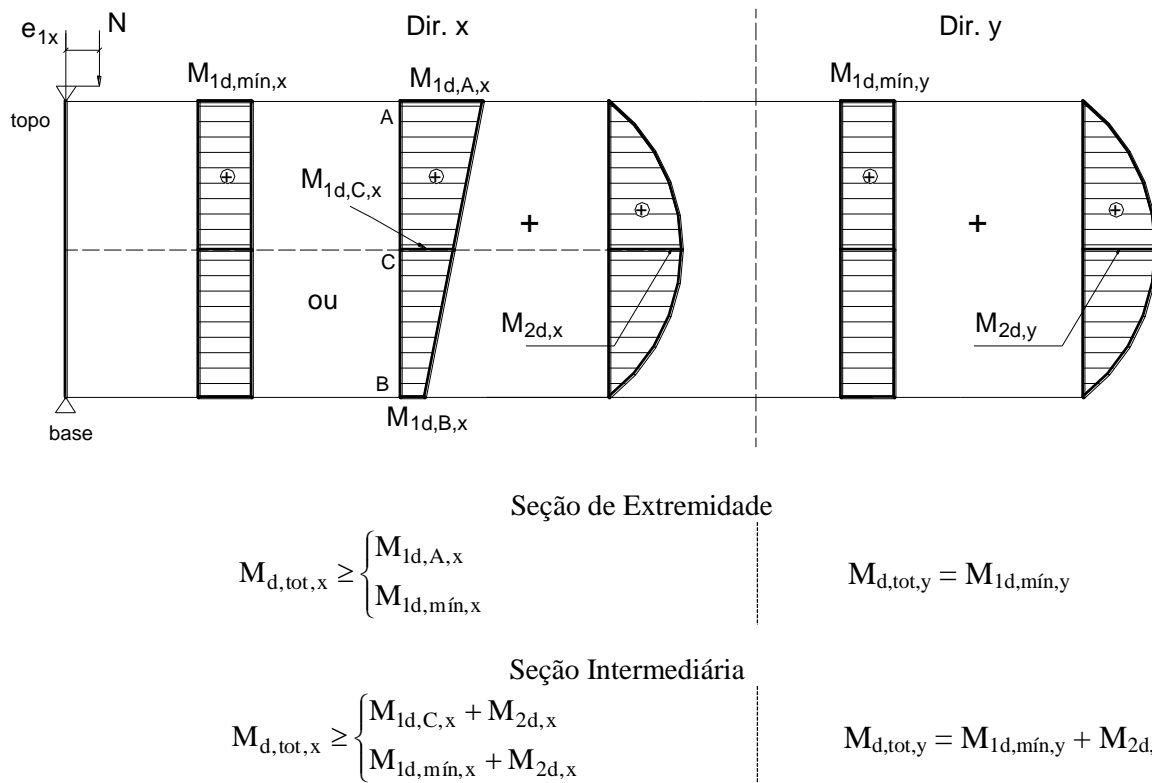


Figura 68 – Momentos fletores atuantes nos pilares de extremidade.

Como opção aos diagramas de momentos fletores, a Figura 69 e a Figura 70 mostram as excentricidades, com as situações de projeto (S.P.) e as situações de cálculo (s.c.) para as seções de extremidade e intermediária C. Nas 1<sup>as</sup> situações de cálculo (1<sup>a</sup> s.c.) estão indicadas as excentricidades que ocorrem na direção x, e nas 2<sup>as</sup> s.c. as excentricidades na direção y. A Figura 69 mostra a situação para a seção de extremidade do topo do pilar, que neste exemplo é onde se considerou atuar o maior momento fletor de 1<sup>a</sup> ordem ( $M_{1d,A,x}$  – ver Figura 68). De modo genérico, as excentricidades de 1<sup>a</sup> ordem (topo ou base e seção intermediária C) são calculadas como:

$$e_{1,A} = \frac{M_{1d,A}}{N_d} \qquad , \qquad e_{1,B} = \frac{M_{1d,B}}{N_d} \qquad \text{Eq. 94}$$

$$e_{1,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1,A} + 0,4 e_{1,B} \\ 0,4 e_{1,A} \end{cases} \qquad \text{Eq. 95}$$

Nas seções de base e topo do pilar, devido aos apoios (vínculos), não ocorre deslocamento horizontal, de modo que  $e_2 = 0$ . Lembrando que a excentricidade de 2<sup>a</sup> ordem deve ser considerada somente se  $\lambda > \lambda_1$ , para uma dada direção do pilar, sendo máxima na seção intermediária C, onde é considerada a excentricidade de 1<sup>a</sup> ordem  $e_{1x,C}$  na situação de projeto (Figura 70). As excentricidades de 1<sup>a</sup> ordem (extremidade e seção intermediária -  $e_{1,A}$  e  $e_{1,C}$ ) devem ser comparadas à excentricidade mínima (Eq. 92).

Para a 2<sup>a</sup> s.c. existem duas opções (Figura 69 e Figura 70), em função de se considerar ou não a excentricidade de 1<sup>a</sup> ordem ( $e_{1x,A}$  ou  $e_{1x,C}$ ). A não consideração é uma simplificação que evita a *Flexão Composta Oblíqua*, e possibilita o cálculo da armadura do pilar somente como dois casos de *Flexão Composta Normal*, que tem ábacos em maior quantidade. Tal simplificação apoia-se em Fusco (1981, p. 254), e foi muito utilizada nas décadas passadas. Portanto, a *Flexão Composta Oblíqua* da 2<sup>a</sup> s.c. é uma opção.

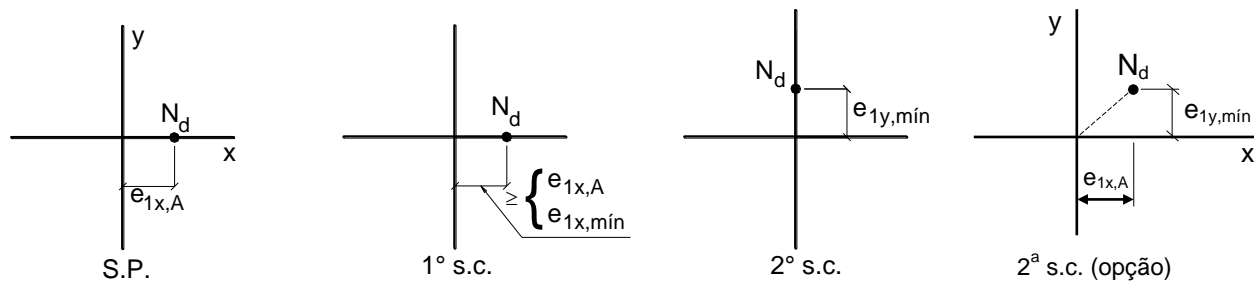


Figura 69 – Situação de projeto e de cálculo para a seção de extremidade do pilar de extremidade.

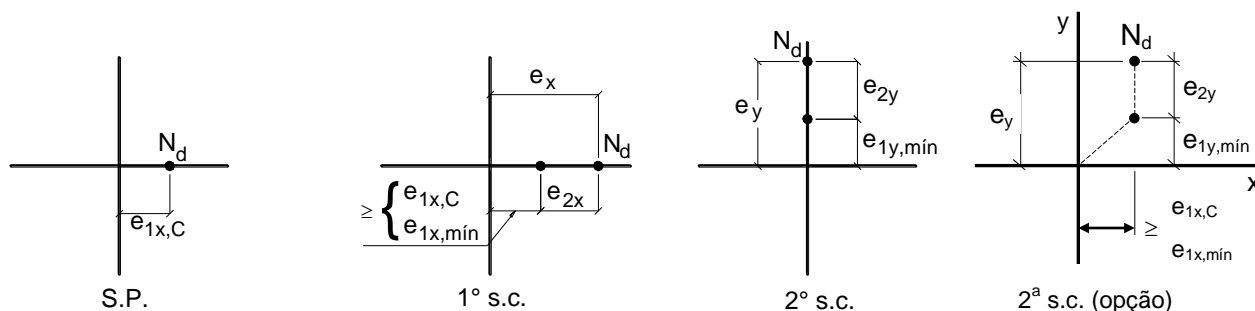


Figura 70 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária do pilar de extremidade.

Para cada situação de cálculo deve ser calculada uma armadura longitudinal, sendo adotada como armadura final a maior, considerando-se, no entanto, o mesmo arranjo das barras da armadura na seção transversal.

### c) Pilar de Canto

No **pilar de canto** a solicitação de projeto é a *Flexão Composta Oblíqua* (ver Figura 65), com a existência de momentos fletores de 1ª ordem nas duas direções principais do pilar, como mostrados na Figura 71, e conforme as excentricidades ( $e_{1x}$  e  $e_{1y}$ ) na Figura 72 e Figura 73. No pilar em questão está indicado que é na seção de extremidade do topo que ocorre o momento fletor  $M_A$  ( $M_A \geq M_B$ ), nas duas direções, sendo, portanto, a seção de extremidade a ser analisada. No entanto, o momento fletor  $M_A$  em cada direção pode não ocorrer na mesma seção de extremidade, sendo por isso importante comparar as seções de topo e base.

O momento fletor total ( $M_{d,tot}$ ) em cada direção está indicado na Figura 71, podendo ocorrer na seção de extremidade (topo neste caso) ou na seção intermediária C (correspondente ao  $M_{2d}$  máximo), sendo o momento fletor de 1ª ordem  $M_{1d,C}$  avaliado com a Eq. 93. A armadura longitudinal é calculada para as duas direções principais, considerando-se as barras distribuídas de modo idêntico na seção transversal do pilar, e como armadura final adota-se a maior.

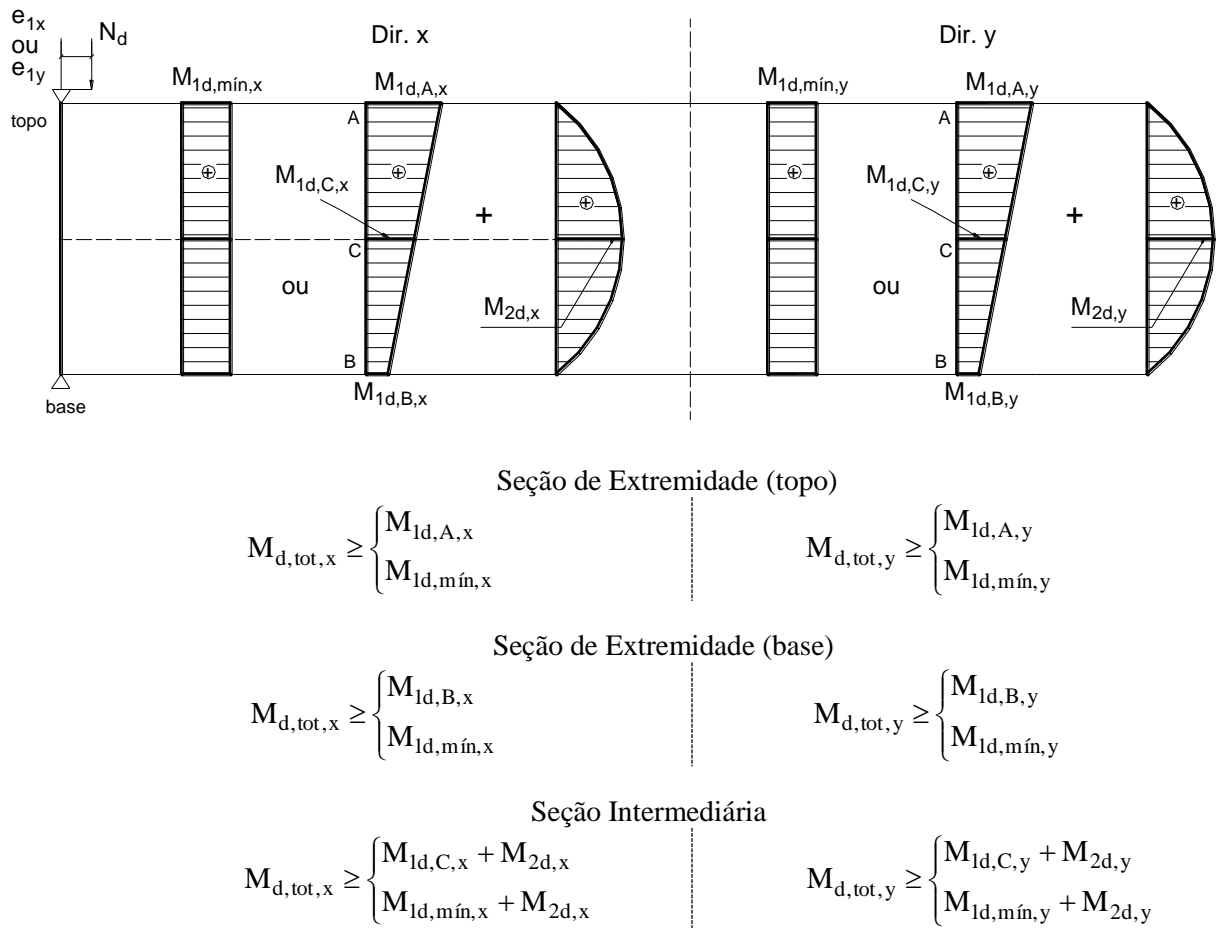


Figura 71 – Momentos fletores atuantes no pilar de canto.

Como opção aos diagramas de momentos fletores, a Figura 72 mostra a situação de projeto (S.P.) e a situação de cálculo (s.c.) para a seção de extremidade mais solicitada (topo neste exemplo, onde ocorre  $M_{1d,A,x}$ ), e a Figura 73 mostra a seção intermediária C. A solicitação nas situações de projeto e de cálculo é de *Flexão Composta Oblíqua*. Na situação de projeto da seção intermediária C a excentricidade de 1ª ordem altera-se de  $e_{1,A}$  para  $e_{1,C}$ , calculadas com a Eq. 94 e Eq. 95. As excentricidades de 1ª ordem devem ser sempre comparadas às excentricidades mínimas (Eq. 92). Conforme a comparação entre  $\lambda$  e  $\lambda_1$  em cada direção principal, considerando-se excentricidades de 2ª ordem elas devem ser acrescentadas às excentricidades de 1ª ordem.

Para cada situação de cálculo deve ser determinada uma armadura longitudinal, calculadas com o mesmo arranjo de barras na seção transversal, devendo-se escolher a maior como armadura final.

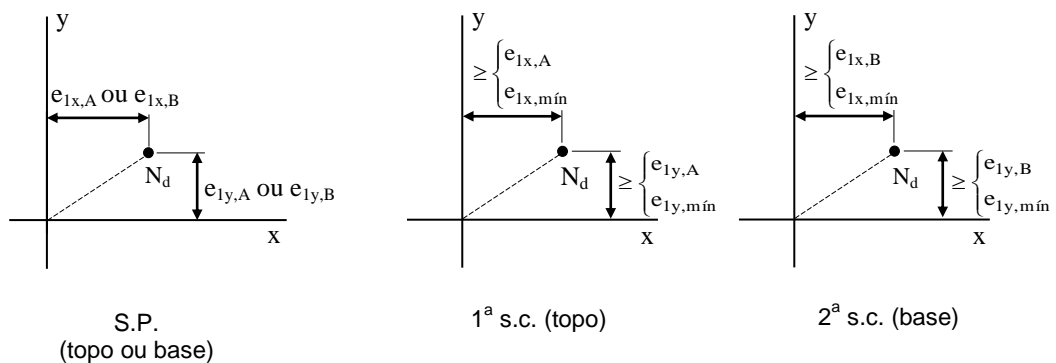


Figura 72 – Situação de projeto e de cálculo para a seção de extremidade (topo e base) do pilar de canto.

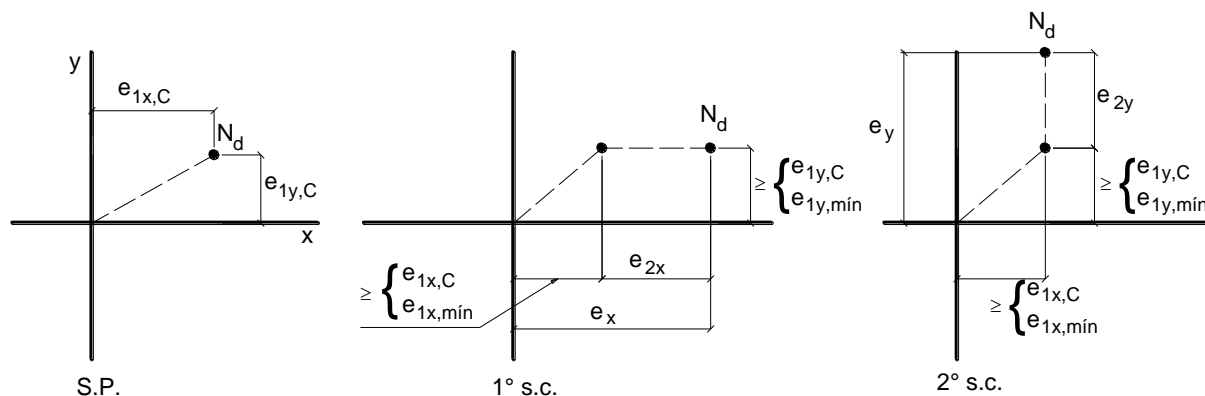


Figura 73 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária do pilar de canto.

### 10.1.2.2 Cálculo Via Equação do Momento Fletor Total

No caso de se desejar uma forma mais direta de calcular o momento fletor total ( $M_{d,tot}$ ) em cada direção do pilar, pode ser utilizada a equação fornecida pela NBR 6118 (15.8.3.3.2 - *Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*), que soma o momento fletor de 1ª ordem (corrigido pelo coeficiente  $\alpha_b$ ) com o momento fletor de 2ª ordem:

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad \text{Eq. 96}$$

com  $M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$  e  $(\alpha_b \cdot M_{1d,A}) \geq M_{1d,min}$  ;

$\alpha_b$  = parâmetro definido no item 8.3;

$N_d$  = força normal solicitante de cálculo;

$\ell_e$  = comprimento equivalente.

$1/r$  = curvatura na seção crítica, já avaliada pela expressão aproximada (Eq. 76):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

onde  $h$  é a dimensão da seção transversal na direção considerada. A força normal adimensional ( $v$ ) foi definida na Eq. 77:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$$

$A_c$  = área da seção transversal do pilar;

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto ( $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$ ).

### 10.1.3 Método do Pilar- Padrão com Rigidez $\kappa$ Aproximada

O **Método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada** pode ser utilizado em opção ao *Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*. Conforme a NBR 6118 (15.8.3.3.3), o método pode ser “empregado apenas no cálculo de pilares com  $\lambda \leq 90$ , com seção retangular constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. A não linearidade geométrica deve ser considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não linearidade física deve ser considerada através de uma expressão aproximada da rigidez. O momento total máximo no pilar deve ser calculado a partir da majoração do momento de 1ª ordem pela expressão:”

$$M_{Sd,tot} = \frac{\alpha_b M_{Id,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \kappa / v}} \geq M_{Id,A} \quad \text{Eq. 97}$$

sendo a rigidez adimensional  $\kappa$  dada pela expressão aproximada:

$$\kappa_{aprox} = 32 \left( 1 + 5 \frac{M_{Rd,tot}}{h \cdot N_d} \right) v \quad \text{Eq. 98}$$

“Em um processo de dimensionamento, toma-se  $M_{Rd,tot} = M_{Sd,tot}$ . Em um processo de verificação, onde a armadura é conhecida,  $M_{Rd,tot}$  é o momento resistente calculado com essa armadura e com  $N_d = N_{Sd} = N_{Rd}$ .”

As variáveis  $h$ ,  $v$ ,  $M_{Id,A}$ ,  $\lambda$  e  $\alpha_b$  são as mesmas já definidas. Substituindo a Eq. 98 na Eq. 97 obtém-se uma equação do 2º grau, útil para calcular diretamente o valor de  $M_{Sd,tot}$ , sem a necessidade de iterações:

$$a M_{Sd,tot}^2 + b M_{Sd,tot} + c = 0 \quad \text{Eq. 99}$$

$$\begin{cases} a = 5h \\ b = h^2 N_d - \frac{N_d \ell_e^2}{320} - 5h \alpha_b M_{Id,A} \\ c = -N_d h^2 \alpha_b M_{Id,A} \end{cases} \quad \text{Eq. 100}$$

$$M_{Sd,tot} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Eq. 101}$$

Como opção às equações Eq. 99, Eq. 100 e Eq. 101, o cálculo do momento fletor total também pode ser feito aplicando a equação do 2º grau seguinte, com  $M_{Id,A} \geq M_{Id,mín}$ :

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{Id,A}) M_{Sd,tot} - 3840\alpha_b h N_d M_{Id,A} = 0 \quad \text{Eq. 102}$$

#### 10.1.4 Envoltória de Momentos Fletores Mínimos

Conforme a NBR 6118 (11.3.3.4.3): “Para pilares de seção retangular, pode-se definir uma envoltória mínima de 1ª ordem, tomada a favor da segurança,” conforme mostrado na Figura 74.

$$\left( \frac{M_{Id,mín,x}}{M_{Id,mín,xx}} \right)^2 + \left( \frac{M_{Id,mín,y}}{M_{Id,mín,yy}} \right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 103}$$

$$M_{Id,mín,xx} = N_d (0,015 + 0,03h)$$

$$M_{Id,mín,yy} = N_d (0,015 + 0,03b)$$

$M_{Id,mín,xx}$  e  $M_{Id,mín,yy}$  = componentes em flexão composta normal;

$M_{Id,mín,x}$  e  $M_{Id,mín,y}$  = componentes em flexão composta oblíqua.

“Neste caso, a verificação do momento mínimo pode ser considerada atendida quando, no dimensionamento adotado, obtém-se uma envoltória resistente que englobe a envoltória mínima de 1ª ordem. Quando houver a necessidade de calcular os efeitos locais de 2ª ordem em alguma das direções do pilar, a verificação do momento mínimo deve considerar ainda a envoltória mínima com 2ª ordem, conforme 15.3.2.”

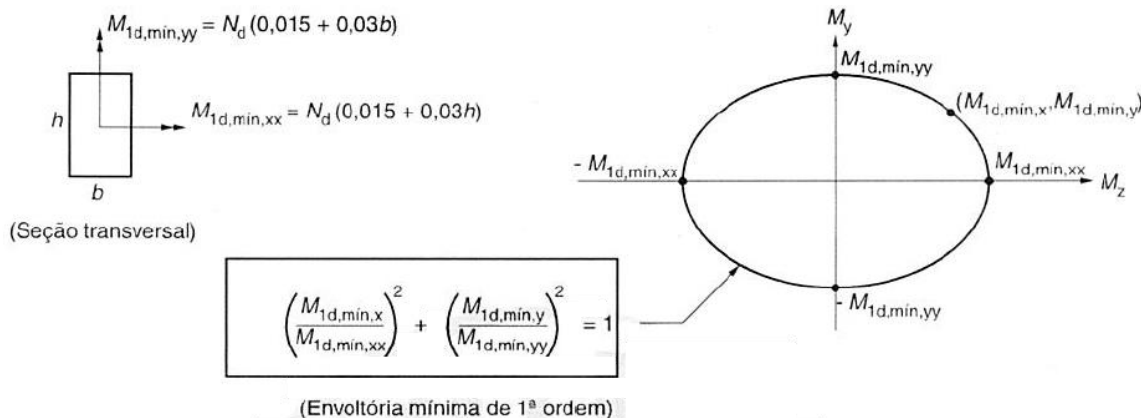


Figura 74 – Envoltória mínima de 1ª ordem (Figura 11.3 da NBR 6118).

No item 15.3.2 a norma reapresenta o diagrama da Figura 74 contendo a envoltória mínima acrescida dos efeitos da 2ª ordem, e também com a envoltória resistente (Figura 75). “Para pilares de seção retangular, quando houver a necessidade de calcular os efeitos locais de 2ª ordem, a verificação do momento mínimo pode ser considerada atendida quando, no dimensionamento adotado, obtém-se uma envoltória resistente que englobe a envoltória mínima com 2ª ordem, cujos momentos totais são calculados a partir dos momentos mínimos de 1ª ordem e de acordo com item 15.8.3. A consideração desta envoltória mínima pode ser realizada através de duas análises à flexão composta normal, calculadas de forma isolada e com momentos fletores mínimos de 1ª ordem atuantes nos extremos do pilar, nas suas direções principais.”

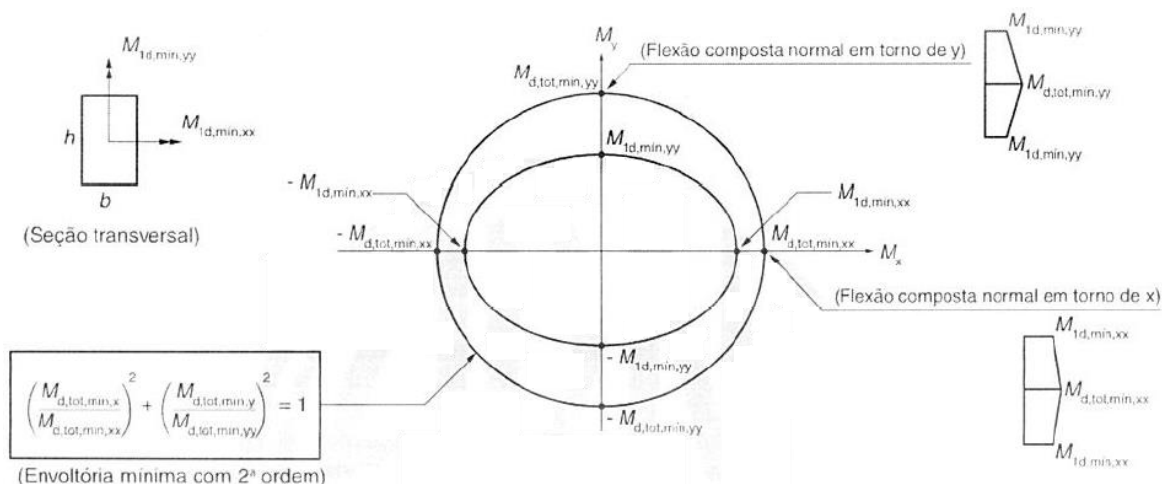


Figura 75 – Envoltória mínima com 2ª ordem (Figura 15.2 da NBR 6118).

## 10.2 Cálculo com a Excentricidade Acidental

Como já comentado no início do item 10.1, o dimensionamento de pilares com base na excentricidade accidental é uma opção ao dimensionamento com o momento fletor mínimo. O que difere um procedimento do outro é que com a aplicação da excentricidade accidental, **a excentricidade de 1ª ordem (se existir) deve sempre ser somada à excentricidade accidental**. Como foi visto, aplicando o momento fletor mínimo, a excentricidade de 1ª ordem é desprezada quando menor que a excentricidade mínima. Os casos mostrados a seguir são válidos apenas para pilares com  $\lambda_{máx} \leq 90$ . Para cada situação de cálculo deve ser calculada uma armadura, considerando-se o mesmo arranjo (posicionamento) das barras na seção transversal, e a armadura final será a maior.

### 10.2.1 Pilar Intermediário

A Figura 76 mostra a situação de projeto (S.P.) e as situações de cálculo (s.c.) do **pilar intermediário**. Na S.P. a solicitação é de *Compressão Simples*, e ocorre *Flexão Composta Normal* nas situações de cálculo. A excentricidade accidental ( $e_a$ ) é calculada com a Eq. 79 ou Eq. 80, respectivamente para falta de retilinearidade e desaprumo do pilar. A NBR 6618 preconiza que considerar a falta de retilinearidade é suficiente, e como mostrado na Figura 60, a excentricidade máxima ocorre em uma seção intermediária ao longo da altura do

pilar. Por segurança a excentricidade acidental é adotada simultaneamente nas duas direções, devendo ser somada à excentricidade de 2ª ordem (quando existir), calculada com a Eq. 74.

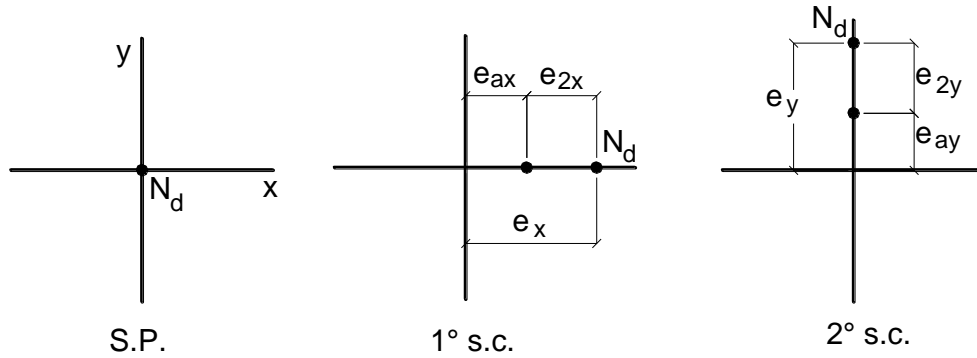


Figura 76 – Situação de projeto e situações de cálculo de pilar intermediário com  $\lambda_{m\acute{a}x} \leq 90$ .

## 10.2.2 Pilar de Extremidade

No **pilar de extremidade** ocorre uma excentricidade de 1ª ordem na situação de projeto, na direção x ou y. Nos gráficos da Figura 77 e Figura 78 está suposta na direção x. As seções de extremidade (topo e base), onde geralmente ocorrem os maiores momentos fletores de 1ª ordem, deve ser analisada para o maior momento fletor ( $M_A$ ). Quando a excentricidade acidental é considerada por falta de retilinearidade, ela é zero nas extremidades do pilar e máxima na seção intermediária a  $H/2$  (ver Figura 60), onde deve ser somada à excentricidade de 2ª ordem ( $e_{2x}$  ou  $e_{2y}$ ). Na seção intermediária deve ser considerada a excentricidade de 1ª ordem  $e_{1x,C}$  (ver Eq. 94 e Eq. 95), suposta aqui na direção x.

### Seção Extremidade

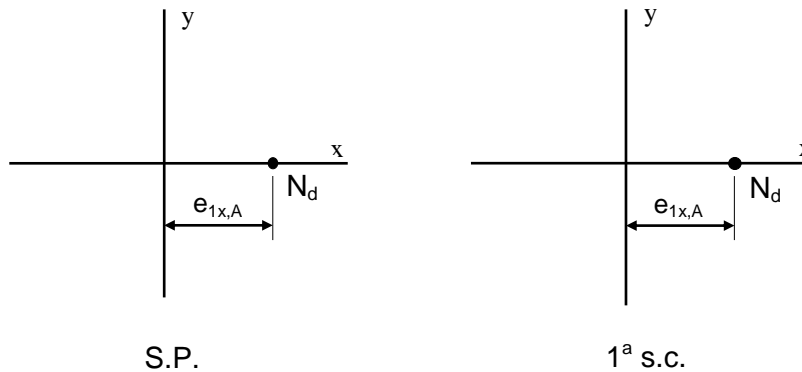


Figura 77 – Situação de projeto e de cálculo para as **seções de extremidade** (topo ou base) do pilar de extremidade.

### Seção Intermediária C

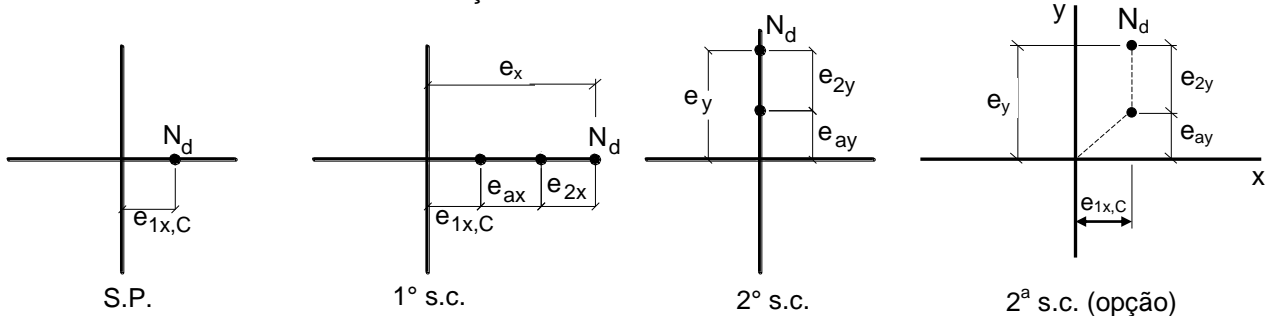


Figura 78 – Situação de projeto e situações de cálculo para a **seção intermediária** do pilar de extremidade.

Como apresentado no item 10.1.2.1, a não consideração das excentricidades de 1ª ordem ( $e_{1x,A}$  e  $e_{1x,C}$ ) nas situações de cálculo na direção y configura uma simplificação apresentada por Fusco (1981, p. 254), e que possibilita o cálculo da armadura do pilar somente como dois casos de *Flexão Composta Normal*.

### 10.2.3 Pilar de Canto

Como no **pilar de canto** ocorrem momentos fletores de 1ª ordem nas duas direções principais, ambas as seções de extremidade (topo e base) devem ser analisadas, pois dependendo dos valores e da combinação dos momentos fletores nas duas direções, a situação mais crítica pode ser na base ou no topo (Figura 79), com excentricidade accidental por falta de retilinearidade zero nas extremidades (ver Figura 60). Na seção intermediária C as excentricidades de 1ª ordem alteram-se para  $e_{1x,C}$  e  $e_{1y,C}$ , como mostrado na Figura 80, e a excentricidade accidental é acrescentada em cada direção. E ocorrendo excentricidades de 2ª ordem, elas devem ser acrescentadas.

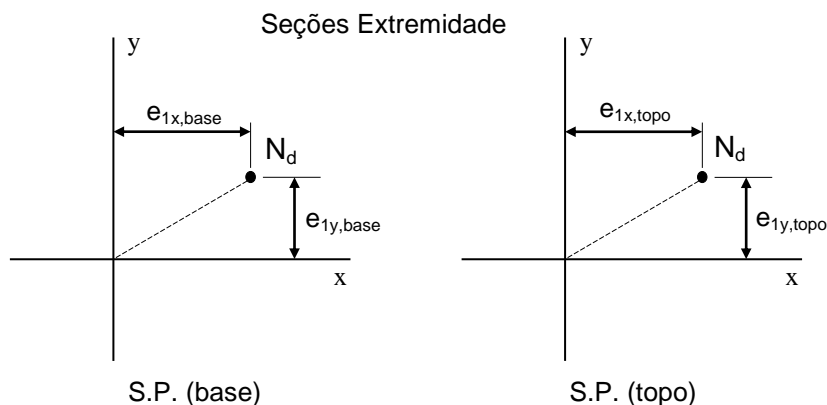


Figura 79 – Situação de projeto para as seções de extremidade (topo e base) do pilar de canto.

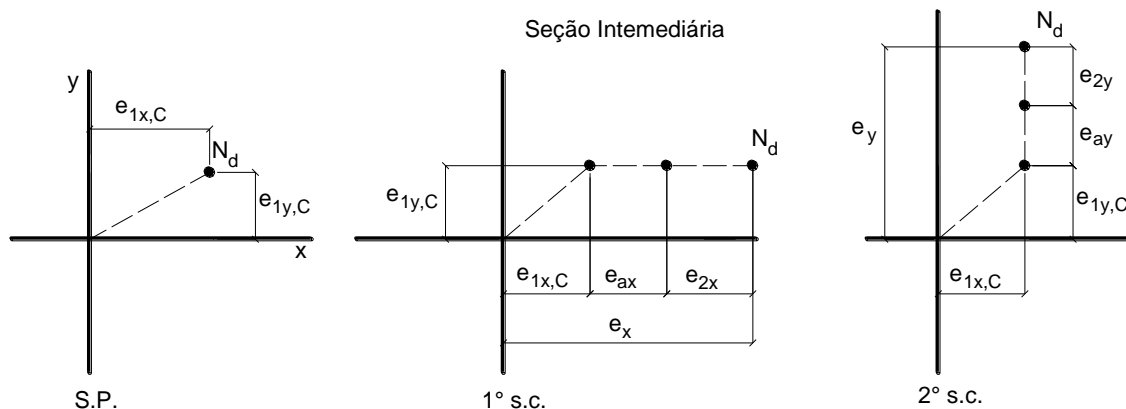


Figura 80 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária do pilar de canto.

## 11. DISPOSIÇÕES CONSTRUTIVAS

### 11.1 Dimensão Mínima e Coeficiente de Ponderação ( $\gamma_n$ )

A NBR 6118 (item 13.2.3) impõe que “A seção transversal de pilares e pilares-parede maciços, qualquer que seja a sua forma, não pode apresentar dimensão menor que 19 cm. Em casos especiais, permite-se a consideração de dimensões entre 19 cm e 14 cm, desde que se multipliquem os esforços solicitantes de cálculo a serem considerados no dimensionamento por um coeficiente adicional  $\gamma_n$ , de acordo com o indicado na Tabela 13.1 e na Seção 11. Em qualquer caso, não se permite pilar com seção transversal de área inferior a 360 cm<sup>2</sup>”, o que representa a seção mínima de 14 x 25,7 cm. A Tabela 6 apresenta o coeficiente adicional. É importante salientar que o texto indica que **todos os esforços solicitantes atuantes no pilar devem ser majorados por  $\gamma_n$** , ou seja, a força normal e os momentos fletores que existirem.

Tabela 6 – Coeficiente adicional  $\gamma_n$  para pilares e pilares-parede (Tabela 13.1 da NBR 6118).

b	$\geq 19$	18	17	16	15	14
$\gamma_n$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

Nota: O coeficiente  $\gamma_n$  deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento.  
 $\gamma_n = 1,95 - 0,05 b$   
**b** = menor dimensão da seção transversal (cm).

Segundo a NBR 6118 (18.2.1), “O arranjo das armaduras deve atender não só à sua função estrutural, como também às condições adequadas de execução, particularmente com relação ao lançamento e ao adensamento do concreto. Os espaços devem ser projetados para a introdução do vibrador e de modo a impedir a segregação dos agregados e a ocorrência de vazios no interior do elemento estrutural.” Essas recomendações da norma são gerais, válidas para todos os elementos estruturais. No caso dos pilares deve-se ter uma atenção especial à região de ligação com as vigas, onde pode existir grande quantidade de barras (verticais nos pilares e horizontais nas vigas), além dos estribos.

## 11.2 Armadura Longitudinal

As disposições relativas à armadura longitudinal dos pilares encontram-se no item 18.4.2 da NBR 6118.

### 11.2.1 Diâmetro Mínimo

O diâmetro das barras longitudinais ( $\phi_\ell$ ) deve ser:

$$\phi_\ell \begin{cases} \geq 10 \text{ mm} \\ \leq \frac{b}{8} \end{cases}, \quad \mathbf{b} = \text{menor dimensão da seção transversal do pilar.} \quad \text{Eq. 104}$$

### 11.2.2 Distribuição Transversal

NBR 6118 (18.4.2.2): “As armaduras longitudinais devem ser dispostas na seção transversal, de forma a garantir a resistência adequada do elemento estrutural. Em seções poligonais, deve existir pelo menos uma barra em cada vértice; em seções circulares, no mínimo seis barras distribuídas ao longo do perímetro.

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, fora da região de emendas, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:”

$$e_{\text{mín, livre}} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell, \phi_{\text{feixe}}, \phi_{\text{lúva}} \\ 1,2d_{\text{máx agreg}} \end{cases} \quad \text{Eq. 105}$$

$\phi_\ell$  = diâmetro da barra longitudinal;

$\phi_{\text{feixe}} = \phi_n = \phi\sqrt{n}$ , onde  $n$  é o número de barras do feixe;

$d_{\text{máx. agreg}}$  = dimensão máxima característica do agregado graúdo (19 mm para brita 1 e 25 mm para brita 2).

“Esses valores se aplicam também às regiões de emendas por traspasse das barras. Quando estiver previsto no plano de concretagem o adensamento através de abertura lateral na face da fôrma, o espaçamento das armaduras deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador.

O espaçamento máximo entre eixos das barras, ou de centros de feixes de barras, deve ser:

$$e_{\text{máx, eixos}} \leq \begin{cases} 2b \\ 40 \text{ cm} \end{cases}, \quad \mathbf{b} = \text{menor dimensão da seção transversal do pilar.} \quad \text{Eq. 106}$$

### 11.2.3 Armadura Mínima e Máxima

A armadura longitudinal mínima é calculada por (item 17.3.5.3.1):

$$A_{s,\text{mín}} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \text{Eq. 107}$$

$N_d$  = força normal de cálculo;

$f_{yd}$  = resistência de cálculo de início de escoamento do aço;

$A_c$  = área da seção transversal do pilar.

A armadura longitudinal máxima (item 17.3.5.3.2) é dada por:

$$A_{s,\text{máx}} = 0,08 A_c \quad \text{Eq. 108}$$

“A máxima armadura permitida em pilares deve considerar inclusive a sobreposição de armadura existente em regiões de emenda, devendo ser também respeitado o disposto em 18.4.2.2.”

### 11.2.4 Detalhamento da Armadura

O arranjo típico do detalhamento da armadura de pilar de um pavimento de edificação está mostrado na Figura 81.

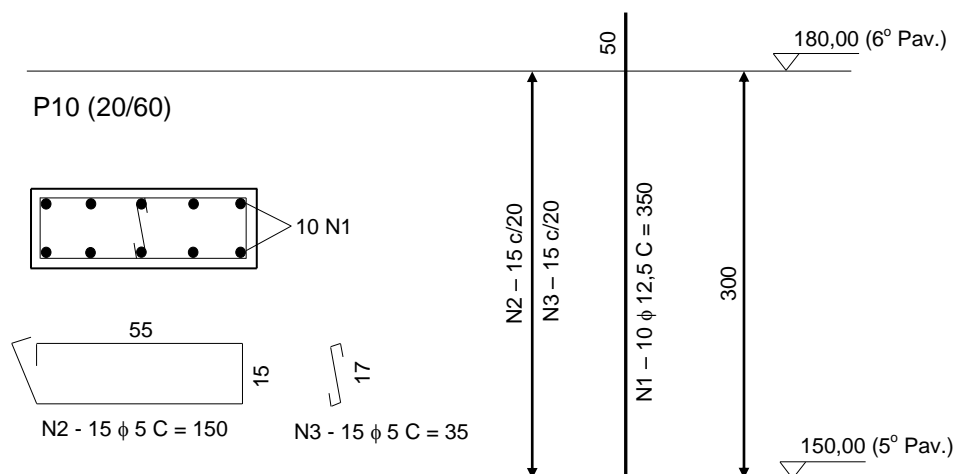


Figura 81 – Detalhamento típico de armadura de pilar em um pavimento.

### 11.2.5 Proteção contra Flambagem

No item 18.2.4 da NBR 6118 encontra-se: “Sempre que houver possibilidade de flambagem das barras da armadura, situadas junto à superfície do elemento estrutural, devem ser tomadas precauções para evitá-la. Os estribos poligonais garantem contra a flambagem as barras longitudinais situadas em seus cantos e as por eles abrangidas, situadas no máximo à distância  $20\phi$  do canto, se nesse trecho de comprimento  $20\phi$ , não houver mais de duas barras, não contando a de canto. Quando houver mais de duas barras nesse trecho ou barra fora dele, deve haver estribos suplementares.

Se o estribo suplementar for constituído por uma barra reta, terminada em ganchos ( $90^\circ$  a  $180^\circ$ ), ele deve atravessar a seção do elemento estrutural, e os seus ganchos devem envolver a barra longitudinal.” (ver Figura 82 e Figura 83).

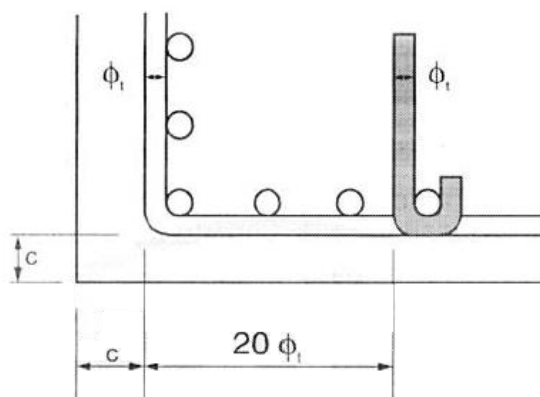


Figura 82 – Proteção contra flambagem das barras, segundo a NBR 6118.

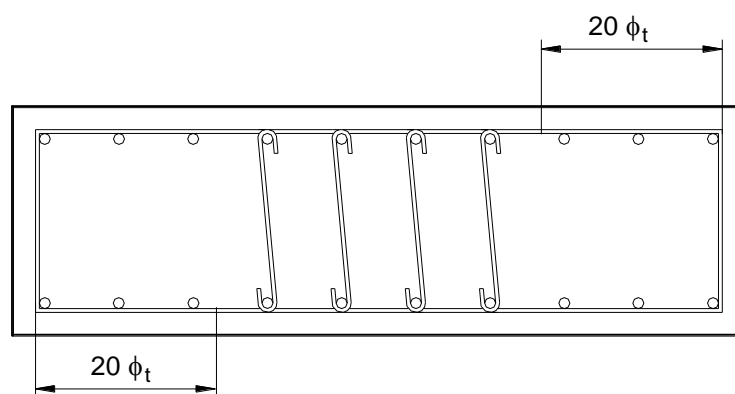


Figura 83 – Critério para proteção das barras longitudinais contra a flambagem.

“No caso de estribos curvilíneos cuja concavidade esteja voltada para o interior do concreto, não há necessidade de estribos suplementares. Se as seções das barras longitudinais se situarem em uma curva de concavidade voltada para fora do concreto, cada barra longitudinal deve ser ancorada pelo gancho de um estribo reto ou pelo canto de um estribo poligonal.”

### 11.3 Armadura Transversal

“A armadura transversal de pilares, constituída por estribos e, quando for o caso, por grampos suplementares, deve ser colocada em toda a altura do pilar, sendo **obrigatória** sua colocação na região de cruzamento com vigas e lajes.” (NBR 6118, 18.4.3). O diâmetro dos estribos em pilares deve obedecer a:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 \text{ ou } \phi_{\text{feixe}} / 4 \end{cases} \quad \text{Eq. 109}$$

“O espaçamento longitudinal entre estribos, medido na direção do eixo do pilar, para garantir o posicionamento, impedir a flambagem das barras longitudinais e garantir a costura das emendas de barras longitudinais nos pilares usuais, deve ser”:

$$s_{\text{máx}} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b \text{ (menordimensão do pilar)} \\ 24\phi_\ell \text{ para CA - 25, } 12\phi_\ell \text{ para CA - 50} \end{cases} \quad \text{Eq. 110}$$

Pode ser adotado o valor  $\phi_t < \phi_\ell / 4$  quando as armaduras forem constituídas do mesmo tipo de aço e o espaçamento respeite também a limitação:

$$s_{\text{máx}} = 90000 \left( \frac{\phi_t^2}{\phi_\ell} \right) \frac{1}{f_{yk}}, \quad \text{, com } f_{yk} \text{ em MPa.} \quad \text{Eq. 111}$$

“Quando houver necessidade de armaduras transversais para forças cortantes e torção, esses valores devem ser comparados com os mínimos especificados em 18.3 para vigas, adotando-se o menor dos limites especificados.

Com vistas a garantir a ductilidade dos pilares, recomenda-se que os espaçamentos máximos entre os estribos sejam reduzidos em 50 % para concretos de classe C55 a C90, com inclinação dos ganchos de pelos menos 135°.”

#### 11.4 Pilares-Parede

NBR 6118 (18.5): “No caso de pilares cuja maior dimensão da seção transversal exceda em cinco vezes a menor dimensão, além das exigências constantes nesta subseção e na subseção 18.4, deve também ser atendido o que estabelece a Seção 15, relativamente a esforços solicitantes na direção transversal decorrentes de efeitos de 1ª e 2ª ordens, em especial dos efeitos de 2ª ordem localizados.

A armadura transversal de pilares-parede deve respeitar a armadura mínima de flexão de placas, se essa flexão e a armadura correspondente forem calculadas. Caso contrário, a armadura transversal por metro de face deve respeitar o mínimo de 25 % da armadura longitudinal por metro da maior face da lâmina considerada.”

### 12. ROTEIRO DE CÁLCULO DE PILARES

Apresenta-se o roteiro de cálculo que será aplicado nos exemplos numéricos, com a aplicação do “Método do pilar-padrão com curvatura aproximada” e do “Método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada”, para pilares com  $\lambda_{\text{máx}} \leq 90$ .

#### a) Força normal

A força normal de cálculo pode ser determinada como:

$$N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k \quad \text{Eq. 112}$$

$N_k$  = força normal característica do pilar;

$\gamma_n$  = coeficiente de majoração da força normal (Tabela 6);

$\gamma_f$  = coeficiente de ponderação das ações no ELU (definido na Tabela 11.1 da NBR 6118).

#### b) Índice de esbeltez (Eq. 60 e Eq. 61)

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i}, \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \rightarrow \quad \text{para seção retangular: } \lambda = \frac{3,46 \ell_e}{h}$$

#### c) Momento fletor mínimo (Eq. 91)

$$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad \text{, com } h = \text{dimensão do pilar, em cm, na direção considerada.}$$

#### d) Esbeltez limite (Eq. 81)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \quad \text{, com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

$e_1 = 0$  para pilar intermediário.

$\lambda \leq \lambda_1 \rightarrow$  **não se considera** o efeito local de 2ª ordem na direção considerada;

$\lambda > \lambda_1 \rightarrow$  **se considera** o efeito local de 2ª ordem na direção considerada.

e) Cálculo do momento fletor total e da armadura

O cálculo da armadura pode ser determinado em função do momento fletor mínimo ou da excentricidade acidental. O cálculo do momento fletor total em cada direção do pilar será feito explicitando-se os diagramas de momentos fletores e das excentricidades, e com a aplicação da equação de  $M_{d,tot}$ , segundo os processos aproximados da norma:

e1) Com os diagramas de momentos fletores (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada);

e2) Com os diagramas de excentricidades (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada);

e3) Com a Eq. 96 (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada):

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ e } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$$

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - Método do pilar-padrão com rigidez  $K$  aproximada):

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,tot} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

e5) Com a excentricidade acidental (sem consideração do momento fletor mínimo)

Calcula-se o ângulo  $\theta_1$  (Eq. 78) e a excentricidade acidental para um lance do pilar, considerando falta de retilinearidade do pilar para uma seção intermediária (Eq. 79):

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} \quad ; \quad e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \text{ (falta de retilinearidade)}$$

## 13. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os exemplos a seguir são de pilares biapoiados na base e no topo, de nós fixos (contraventados) e **sem** forças transversais atuantes. Os cálculos serão feitos mostrando-se os diagramas de momentos fletores solicitantes e também as excentricidades, como mostrado no item 10.1.2.1, considerando-se o **momento fletor mínimo** ou a **excentricidade acidental**.

### 13.1 Pilares Intermediários

No **pilar intermediário**, devido à continuidade de vigas e lajes sobre o pilar, os momentos fletores de 1ª ordem são nulos em ambas as direções x-y ( $M_A = M_B = 0$ ), e  $e_{1x} = e_{1y} = 0$ . Os seguintes dados são comuns nos exemplos: coeficientes de ponderação:  $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$ ,  $\gamma_s = 1,15$ ; aço CA-50 ( $f_{yd} = 50/1,15 \cong 43,5 \text{ kN/cm}^2$ ).

#### 13.1.1 Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura 84, sendo conhecidos:  $N_k = 1.000 \text{ kN}$  (100 tf); seção transversal 20 x 50 ( $A_c = 1.000 \text{ cm}^2$ ); comprimento equivalente (de flambagem):  $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$ ; concreto C30;  $d' = 4,0 \text{ cm}$ .

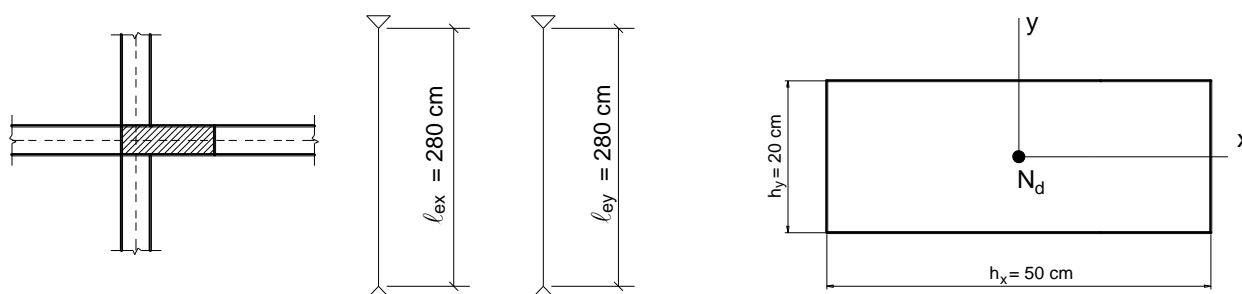


Figura 84 – Posição do pilar em relação às vigas, vínculos na base e no topo nas direções x e y, dimensões da seção transversal e situação de projeto.

### Resolução

#### a) Força normal

A força normal de cálculo é (Eq. 112):  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 1000 = 1.400 \text{ kN}$

com  $\gamma_n = 1,0$  determinado na Tabela 6, em função da largura da seção transversal do pilar ( $h_y = 20 \text{ cm}$ ).

#### b) Índice de esbeltez (Eq. 61)

O índice de esbeltez deve ser calculado para as direções x e y, conforme os eixos mostrados na Figura 84. A fim de padronizar e simplificar a notação, e como já comentado, aqui se considera a direção, e não o eixo do pilar.

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4 \quad (\text{pilar curto na dir. x, ver Eq. 62})$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 48,4 \leq 90 \rightarrow \text{ok!}^{59}$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4 \quad (\text{pilar medianamente esbelto na dir. y})$$

#### c) Momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo, em cada direção, é calculado com a Eq. 91, que com **h** em cm fica:

$$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$$

$$\text{Dir. x:} \quad M_{1d,\text{mín},x} = 1400 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 4.200 \text{ kN.cm} ; e_{1x,\text{mín}} = \frac{M}{N} = \frac{4200}{1400} = 3,00 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y:} \quad M_{1d,\text{mín},y} = 1400 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 2.940 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\text{mín}} = \frac{M}{N} = \frac{2940}{1400} = 2,10 \text{ cm}$$

#### d) Esbeltez limite (Eq. 81)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Nos pilares intermediários não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, assim  $e_1 = 0$  e  $\alpha_b = 1,0$  (ver item 8.3), e:

$$\lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 25 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 19,4 < \lambda_{1,x} = 35 \rightarrow \therefore \text{ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

$$\lambda_y = 48,4 > \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow \therefore \text{ são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.}$$

Em pilares retangulares correntes, geralmente há a necessidade de considerar os efeitos de 2ª ordem ( $e_2$  e  $M_2$ ) somente na direção da largura do pilar.

#### e) Cálculo do momento fletor total e da armadura

Como comentado no roteiro de cálculo, o momento fletor total será calculado com a consideração do momento fletor mínimo, e depois com base na excentricidade acidental. Serão calculados explicitando-se os momentos fletores, bem como as excentricidades.

<sup>59</sup> A comparação com o valor 90 foi feita para verificar se os métodos simplificados que serão aplicados no dimensionamento do pilar podem ser aplicados.

e1) Com os diagramas de momentos fletores (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

O momento fletor de 2ª ordem deve ser calculado para a direção y (Figura 85), sendo:

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 77): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1400}{1000 \frac{3,0}{1,4}} = 0,65$$

Curvatura na direção y (Eq. 76), com **h** sendo o lado  $h_y$  :

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{20(0,65+0,5)} = 2,1739 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h} = \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem é (Eq. 74):

$$e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10r} = \frac{280^2}{10} 2,1739 \cdot 10^{-4} = 1,70 \text{ cm}$$

$$\text{O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75): } M_{2d,y} = N_d \frac{\ell_e^2}{10r} = N_d \cdot e_{2y} = 1400 \cdot 1,70 = 2.380 \text{ kN.cm}$$

Observando os diagramas da Figura 85 nota-se que os momentos fletores totais são:<sup>60</sup>

$$\text{Dir. x: } M_{d,\text{tot},x} = M_{1d,\text{mín},x} = 4.200 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\text{mín},y} + M_{2d,y} = 2.940 + 2.380 = 5.320 \text{ kN.cm}$$

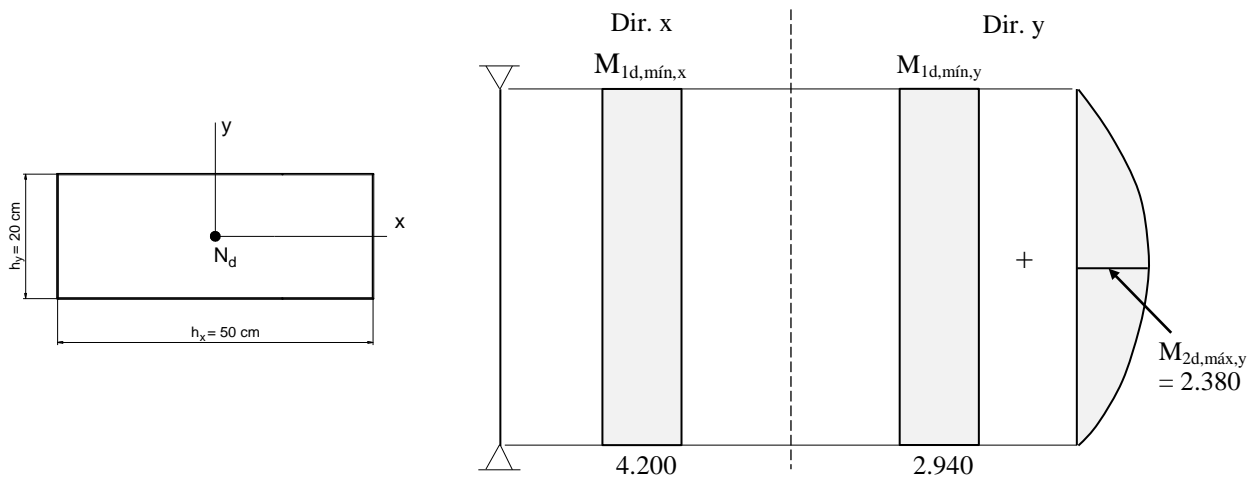


Figura 85 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

e2) Com os diagramas de excentricidades (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

As excentricidades correspondentes aos momentos fletores, já calculadas, estão indicadas na Figura 86.<sup>61</sup> Nas situações de cálculo surgem duas *Flexões Compostas Normais* (ver Figura 67).

<sup>60</sup> Nos pilares retangulares de modo geral é suficiente considerar apenas a direção da largura do pilar, que configura a direção crítica e aquela que conduz à armadura final. Neste texto, com fins didáticos, as duas direções serão sempre analisadas.

<sup>61</sup> Como a excentricidade mínima de 2,10 cm é próxima da excentricidade acidental (2,0 cm) da NB 1/78, a armadura é praticamente igual à da NB 1/78.

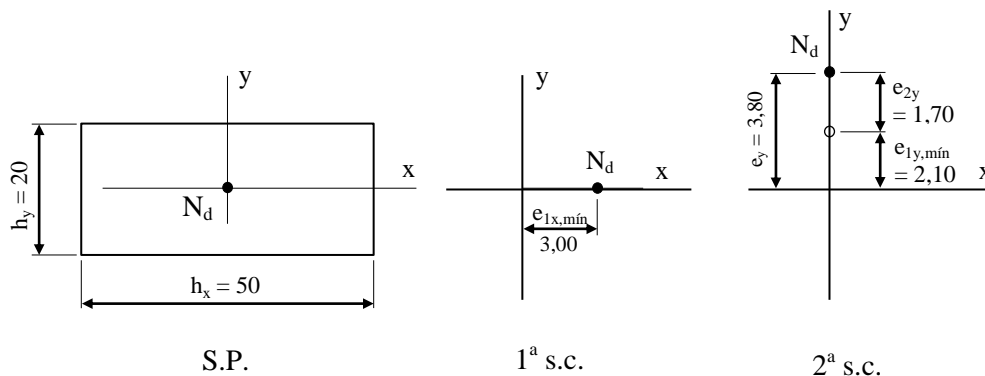


Figura 86 – Situação de projeto e situações de cálculo do pilar intermediário.

Os momentos fletores totais são:

**Dir. x:**  $M_{d,tot,x} = N_d \cdot e_{1x,mín} = 1400 \cdot 3,00 = 4.200 \text{ kN.cm}$

**Dir. y:**  $M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_y = 1400 \cdot 3,80 = 5.320 \text{ kN.cm}$

e3) Com a Eq. 96 (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$$

Não existe o momento fletor  $M_{1d,A}$ , de modo que  $\alpha_b M_{1d,A} = M_{1d,mín}$  em cada direção:

**Dir. x:**  $M_{d,tot,x} = M_{1d,mín,x} = 4.200 \text{ kN.cm}$

**Dir. y:**  $M_{d,tot,y} = M_{1d,mín,y} + M_{2d,y} = 2.940 + 2.380 = 5.320 \text{ kN.cm}$

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - **Método do pilar-padrão com rigidez  $K$  aproximada**)

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,tot} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Aplicando na **direção y**, que é a direção que ocorre  $e_2$ , e fazendo  $M_{1d,A} = M_{1d,mín,y} = 2.940 \text{ kN.cm}$  e  $h = h_y = 20 \text{ cm}$ :

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1400 - 48,4^2 \cdot 20 \cdot 1400 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 2940) M_{Sd,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1400 \cdot 2940 = 0$$

$$19200M_{Sd,tot}^2 - 14.519.680M_{Sd,tot} - 3,161088 \cdot 10^{11} = 0 \rightarrow M_{Sd,tot}^2 - 756,2 M_{Sd,tot} - 16.464.000 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{Sd,tot} = 4.453 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,A} \rightarrow \text{ok!}$

e5) **Cálculo da armadura longitudinal**

Segundo o **Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**, ocorrem no pilar os dois momentos fletores totais, nas direções principais: **dir. x** ( $M_{d,tot,x} = 4.200 \text{ kN.cm}$ ) e **dir. y** ( $M_{d,tot,y} = 5.320 \text{ kN.cm}$ ). Fica claro que se calculada a armadura para cada direção, a maior será aquela relativa à direção y, pois além do momento fletor ser maior, ele é relativo à direção de menor rigidez do pilar, que é a direção da largura da seção transversal. Analisando as excentricidades na Figura 86 isto também fica claro, com a maior excentricidade na direção de menor rigidez do pilar. Quando há certeza nesta análise, apenas esta armadura maior pode ser determinada, ou melhor, todos os cálculos do pilar podem ser feitos direcionados apenas para a direção de menor rigidez (maior esbeltez).

Com  $\nu = 0,65$  e utilizando os ábacos de Venturini (1987)<sup>62</sup> para **Flexão Reta**, faz-se o cálculo de  $\mu$  (Eq. 51 ou Eq. 52) e  $d^3/h$  para a **dir. y** (o valor adimensional  $\mu$  pode ser calculado em função do momento fletor ou da excentricidade):

<sup>62</sup> Os ábacos podem ser encontrados em: [http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{5320}{20 \cdot 1000 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,12 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,65 \frac{3,80}{20} = 0,12$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad , \text{ com o Ábaco A-4: } \omega = 0,22 \text{ (quadrante superior – Compressão), na Figura 87.}^{63}$$

$$\text{A armadura resulta de } \omega = 0,22 \text{ (Eq. 53): } A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,22 \cdot 1000 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 10,84 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow 10 \phi 12,5 \text{ mm (12,50 cm}^2\text{)}$$

Esta quantidade de armadura é pequena, o que significa que a largura do pilar poderia ser diminuída de 20 cm para um valor menor, obedecida a largura mínima de 14 cm, bem como questões arquitetônicas e estruturais, como a relativa à *Estabilidade Global* da edificação.

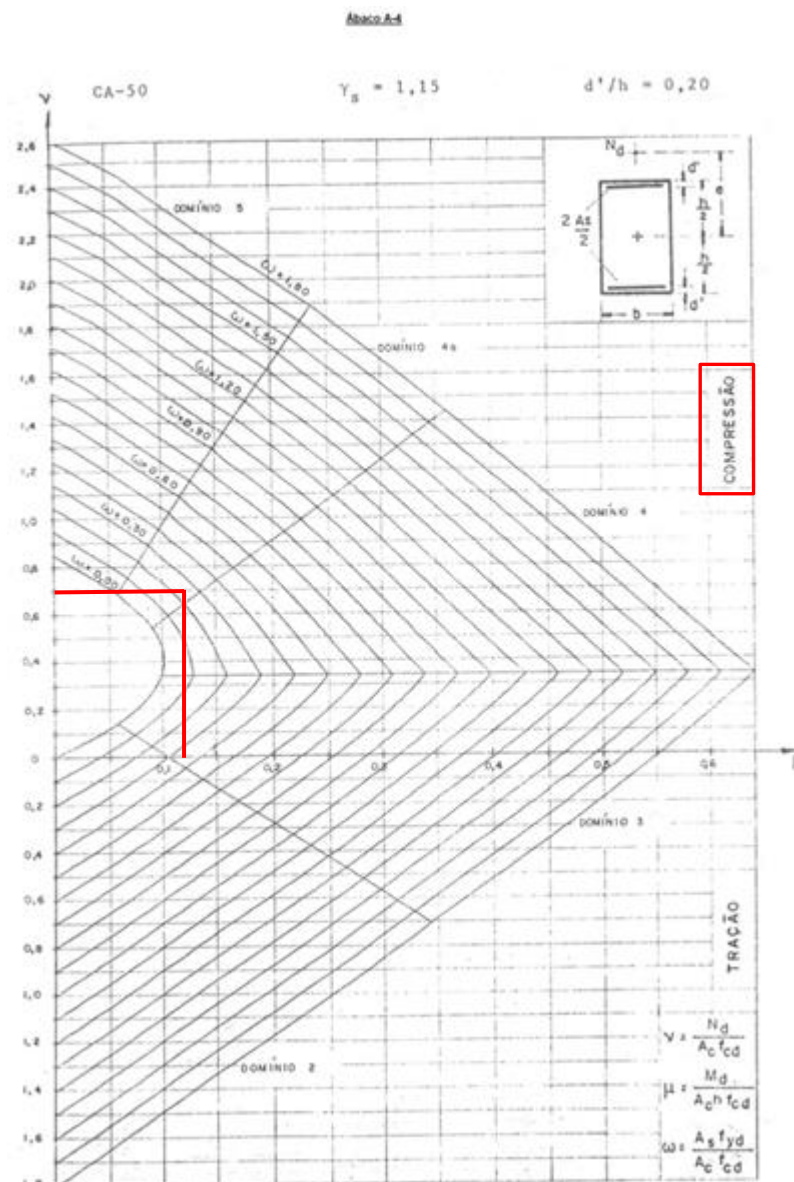


Figura 87 – Ábaco A-4 de Venturini (1987) para a Flexão Reta.

Cada ábaco tem um detalhamento da armadura na seção transversal, conforme o desenho mostrado no lado superior. Nos ábacos A-1 a A-5, por exemplo, metade da armadura é disposta em uma face e a outra

<sup>63</sup> Na determinação de  $\omega$  no ábaco deve-se ter muito cuidado, pois um pequeno erro no valor poderá significar um grande erro no valor da armadura do pilar.

metade na face oposta. Outros ábacos têm fixado o número total de barras, bem como o número de barras em cada face. Como os ábacos A-1 a A-5 não fixam a quantidade de barras, uma quantidade qualquer pode ser colocada nas duas faces,<sup>64</sup> sendo por isso muito interessantes (Figura 88).

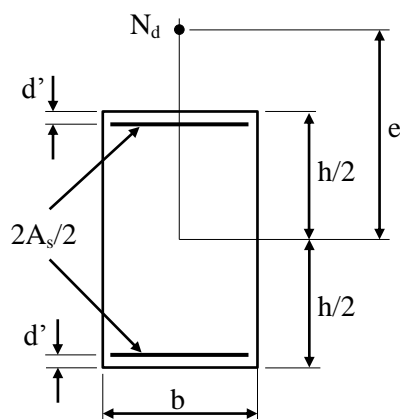


Figura 88 – Detalhe da armadura dos ábacos A-1 a A-5 de Venturini (1987) para a Flexão Reta.

Deve sempre ser observado o posicionamento correto da armadura na seção transversal do pilar, de acordo com o ábaco escolhido. Nos ábacos A-1 a A-5, por exemplo (Figura 88), observa-se que a armadura é posicionada nas faces ou lados com direção perpendicular à excentricidade ( $e$ ) da força  $N_d$ . Ou, em outras palavras, com a regra da mão direita para indicar o momento fletor ( $N_d \cdot e$ ), observa-se que a direção da armadura é coincidente com a direção do dedo polegar.<sup>65</sup> E não é correto considerar que a posição da armadura no desenho indica que deve ser posicionada nos lados menores do pilar.

Com essas considerações, observa-se que no exemplo em questão, a armadura deverá ser disposta nas duas faces maiores do pilar (ao longo dos lados  $h_x$ ), o que fica claro analisando a 2ª situação de cálculo (s.c.) (que originou a armadura, ver Figura 86), com a armadura posicionada na direção perpendicular à direção da excentricidade  $e_y$  (ver Figura 89 – a excentricidade está desenhada fora de escala). Análise semelhante pode ser feita com o momento fletor total que originou a armadura, da direção  $y$ .

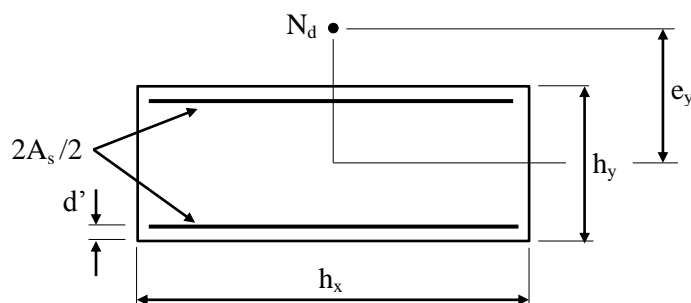


Figura 89 – Posicionamento da armadura no pilar de acordo com o ábaco A-4 de Venturini (1987).

Se aplicado o momento fletor resultante do cálculo segundo o **Método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada**, a armadura resulta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4453}{20 \cdot 1000 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,10$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad , \text{ e com } v = 0,65 \rightarrow \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,13$$

<sup>64</sup> Os espaçamentos livres entre as barras devem obedecer valores práticos e de norma.

<sup>65</sup> Isto é muito importante, de modo que a posição da armadura no detalhamento final do pilar não pode, sob sérias consequências, ficar trocada (errada).

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,13 \cdot 1000 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 6,40 \text{ cm}^2$$

e6) Com a excentricidade acidental (*sem consideração do momento fletor mínimo*)

A NBR 6118 permite que, caso o dimensionamento do pilar seja feito com base na excentricidade acidental e não no momento fletor mínimo, que seja considerada apenas a falta de retilinearidade do pilar. Como se observa na Figura 60, a excentricidade por falta de retilinearidade é considerada em uma seção intermediária, em  $H/2$ . Com a Eq. 78 é calculado o ângulo:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{2,8}} = 0,00598 \text{ rad}$$

tomando  $H$  como a altura do lance do pilar.<sup>66</sup> O valor de  $\theta_1$  deve ser comparado ao valor mínimo:

$$\theta_1 = 0,00598 \text{ rad} \geq \theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \therefore \theta_1 = 0,00598 \text{ rad}$$

Com a Eq. 79 é calculada a excentricidade acidental por falta de retilinearidade:

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \quad \rightarrow \quad e_{ax} = e_{ay} = 0,00598 \frac{280}{2} = 0,84 \text{ cm}$$

A Figura 90 mostra as excentricidades que devem ser consideradas, tomando como base a Figura 76.

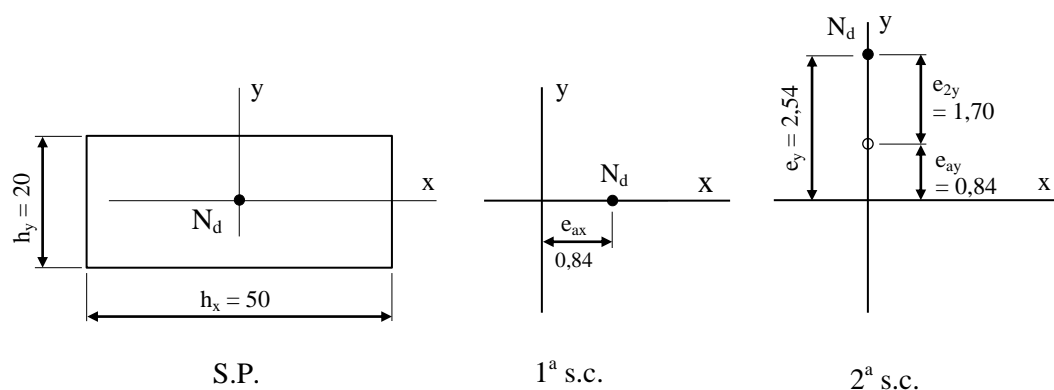


Figura 90 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na excentricidade acidental (falta de retilinearidade).

A armadura resulta:

$$\mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,65 \frac{2,54}{20} = 0,08 \quad ; \quad \frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,08$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,08 \cdot 1000 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 3,94 \text{ cm}^2$$

Resumo:

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,\text{mín}}$ )	10,84	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,\text{mín}}$ )	6,40	- 41
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_a$ )	3,94	36 % de 10,84

<sup>66</sup> A altura  $H$  pode ser tomada como a distância entre os eixos longitudinais das vigas apoiadas no topo e na base do pilar. No caso de pilares apoiados na base e no topo, a altura  $H$  coincide ou é muito próxima ao comprimento equivalente ( $\ell_e$ ).

A armadura calculada com o momento fletor mínimo, que proporciona a excentricidade de 2,10 cm, é praticamente igual àquela que era calculada com a excentricidade acidental da antiga NB 1/78, a qual seria 2,0 cm neste caso. No entanto, com o novo valor para a excentricidade acidental da NBR 6118, de 0,84 cm, a armadura representa apenas 36 % da armadura calculada com o momento fletor mínimo, ou seja, quase um terço apenas. Portanto, adotar o cálculo com o momento fletor mínimo é como manter a armadura como calculada até 2003 com a NB 1/78, ano que a NBR 6118 alterou e diminuiu a excentricidade acidental para o valor atual. A armadura com o **método com rigidez aproximada** também foi menor que aquela com o momento fletor mínimo (– 41 %). Se considerada a excentricidade acidental devida ao desaprumo do pilar, a armadura resulta 8,37 cm<sup>2</sup>, com redução de 23 % do valor 10,84 cm<sup>2</sup>. Essas diferenças justificam a necessidade de realização de ensaios experimentais para comparação e uma avaliação mais realística dos modelos teóricos.

### 13.1.2 Exemplo 2

Este exemplo é semelhante ao anterior, com a diferença da maior altura do pilar, expressa no comprimento equivalente  $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 480$  cm (Figura 91). O exemplo mostra a influência da altura do pilar na quantidade de armadura necessária. Dados:

$N_k = 1.000$  kN ; seção transversal 20 x 50 ( $A_c = 1.000$  cm<sup>2</sup>) ; concreto C30 ;  $d' = 4,0$  cm.

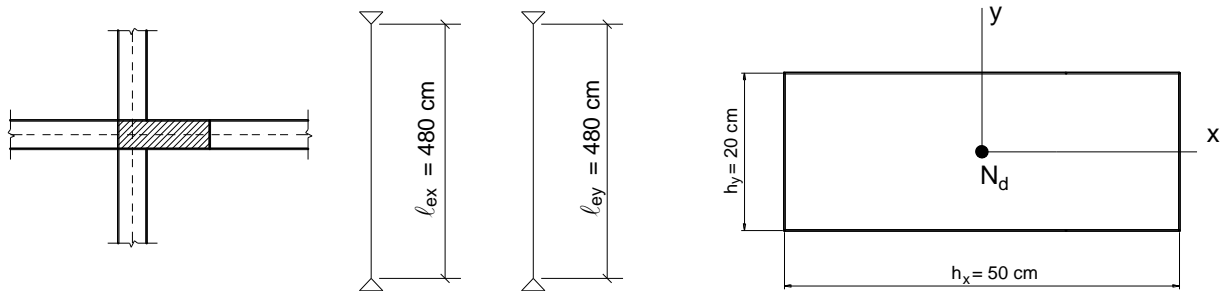


Figura 91 – Posição do pilar em relação às vigas, vínculos na base e no topo nas direções  $x$  e  $y$ , dimensões da seção transversal e situação de projeto.

#### Resolução<sup>67</sup>

##### a) Força normal

A força normal de cálculo é (Eq. 112):  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 1000 = 1.400$  kN

com  $\gamma_n = 1,0$  determinado na Tabela 6, em função da largura da seção transversal do pilar.

##### b) Índice de esbeltez (Eq. 61)

$$\text{Dir. x: } \lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 480}{50} = 33,2 \quad (\text{pilar curto na dir. x, ver Eq. 62})$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 83,0 \leq 90 \quad \rightarrow \text{ok!}$$

$$\text{Dir. y: } \lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 480}{20} = 83,0 \quad (\text{pilar medianamente esbelto na dir. y})$$

##### c) Momento fletor mínimo

Como visto no Exemplo 1, a armadura do pilar resulta da direção de maior esbeltez, a da largura da seção transversal ( $h_y$ ) na direção  $y$ , de modo que os cálculos serão feitos relativos apenas a esta direção, pois a

<sup>67</sup> Por uma questão didática, vários dos cálculos já feitos no Exemplo 1 são aqui repetidos.

direção x não tem importância no pilar deste exemplo. O momento fletor mínimo na direção y (Eq. 91) é:  
 $M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$

$$M_{1d,\text{mín},y} = 1400 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 2.940 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\text{mín}} = 1,5 + 0,03 \cdot 20 = 2,10 \text{ cm}$$

d) *Eslbeltez limite (Eq. 81)*

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Como mostrado no Exemplo 1,  $\lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 35$ . Desse modo:

$\lambda_x = 33,2 < \lambda_{1,x} = 35 \rightarrow \therefore$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 83,0 > \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow \therefore$  **são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

e) *Cálculo do momento fletor total e da armadura*

O momento fletor total será calculado com a consideração do momento fletor mínimo, bem como também com base na excentricidade acidental. Serão calculados explicitando-se os momentos fletores, e as excentricidades.

e1) *Com os diagramas de momentos fletores (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)*

Na **direção y** ocorrem efeitos locais de 2ª ordem, e o momento fletor de 2ª ordem deve ser calculado (Figura 92):

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 77): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1400}{1000 \frac{3,0}{1,4}} = 0,65$$

Curvatura na **dir. y** (Eq. 76), com **h** sendo o lado  $h_y$  :

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{20(0,65+0,5)} = 2,1739 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem na **dir. y** é (Eq. 74):

$$e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{480^2}{10} 2,1739 \cdot 10^{-4} = 5,00 \text{ cm}$$

$$\text{O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75): } M_{2d,y} = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = N_d e_{2y} = 1400 \cdot 5,00 = 7.000 \text{ kN.cm}$$

Observando os diagramas da Figura 92 nota-se que o momento fletor total na **dir. y** é:

$$M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\text{mín},y} + M_{2d,y} = 2.940 + 7.000 = 9.940 \text{ kN.cm}$$

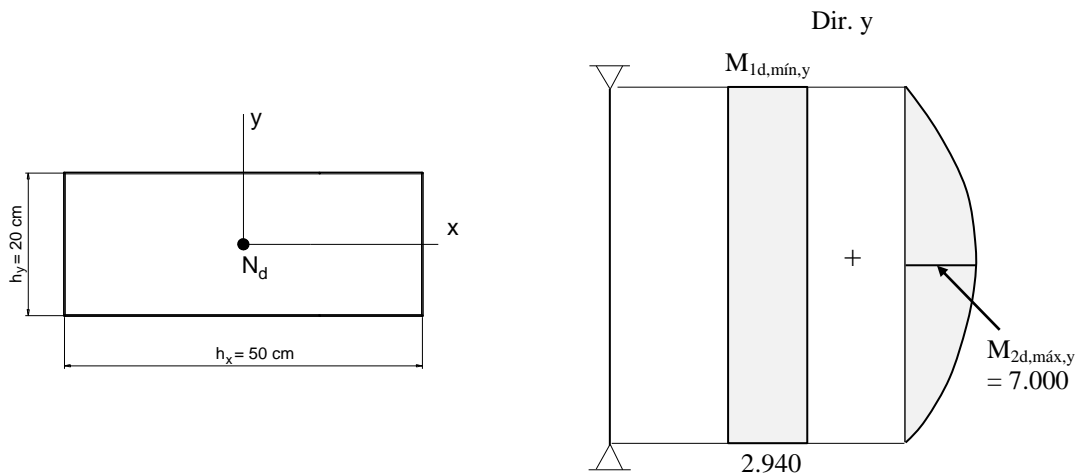


Figura 92 – Momentos fletores atuantes no pilar na direção y.

e2) Com os diagramas de excentricidades (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)

As excentricidades correspondentes aos momentos fletores para a **dir. y** estão indicadas na Figura 93, e tomam como base a Figura 67.

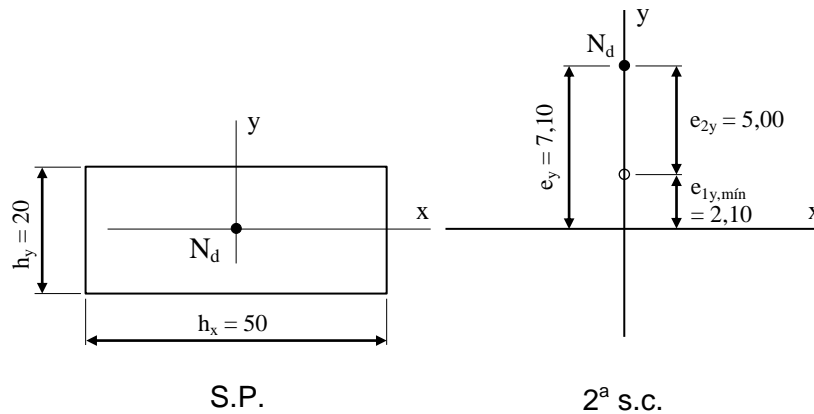


Figura 93 – Situação de projeto e situação de cálculo do pilar intermediário para a direção y.

O momento fletor total é:

$$M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_y = 1400 \cdot 7,10 = 9.940 \text{ kN.cm}$$

e3) Com a Eq. 96 (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell^2}{10 r} \geq M_{1d,A}, \quad \text{com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$$

Não existe o momento fletor  $M_{1d,A}$ , de modo que  $\alpha_b M_{1d,A} = M_{1d,mín} = 2.940 \text{ kN.cm}$ :

$$M_{d,tot,y} = M_{1d,mín,y} + M_{2d,y} = 2.940 + 7.000 = 9.940 \text{ kN.cm}$$

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - Método do pilar-padrão com rigidez  $K$  aproximada)

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,tot} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Aplicando na dir. y, que é a direção de  $e_2$ , e fazendo  $M_{1d,A} = M_{1d,mín,y} = 2.940 \text{ kN.cm}$  e  $h_y = 20 \text{ cm}$ :

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1400 - 83,0^2 \cdot 20 \cdot 1400 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 2940) M_{Sd,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1400 \cdot 2940 = 0$$

$$19200M_{Sd,tot}^2 - 141.820.000M_{Sd,tot} - 3,161088 \cdot 10^{11} = 0 \rightarrow M_{Sd,tot}^2 - 7.386,5 M_{Sd,tot} - 16.464.000 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{Sd,tot} = 9.180 \text{ kN.cm} \geq M_{Id,A}$ .

#### e5) Cálculo da armadura longitudinal

Segundo o **Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**, o momento fletor total na dir. y é  $M_{d,tot,y} = 9.940 \text{ kN.cm}$ . Com  $v = 0,65$  e utilizando os ábacos de Venturini (1987)<sup>68</sup> para Flexão Reta, faz-se o cálculo de  $\mu$  (Eq. 51 ou Eq. 52) e  $d'/h$  para a dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{9940}{20 \cdot 1000 \frac{3,0}{1,4}} = 0,23 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,65 \frac{7,10}{20} = 0,23$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20$$

com  $v = 0,65$  no Ábaco A-4 tem-se:  $\omega = 0,63$  (quadrante superior – Compressão), na Figura 87.<sup>69</sup>

$$\text{A armadura resulta (Eq. 53): } A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,63 \cdot 1000 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 31,03 \text{ cm}^2 \rightarrow 16 \phi 16 \text{ mm (32,00 cm}^2\text{)}$$

A armadura aumentou bastante, de  $10,84 \text{ cm}^2$  (do Exemplo 1) para  $31,03 \text{ cm}^2$ , devido à altura 71 % maior para o pilar. Se aplicado o momento fletor resultante do cálculo segundo o **Método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada**, a armadura resulta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{9180}{20 \cdot 1000 \frac{3,0}{1,4}} = 0,21$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad , \text{ e com } v = 0,65 \rightarrow \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,55$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,55 \cdot 1000 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 27,09 \text{ cm}^2$$

#### e6) Com a excentricidade acidental (sem consideração do momento fletor mínimo)

Com a Eq. 78 é calculado o ângulo:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{4,8}} = 0,00456 \text{ rad}$$

tomado H como a altura do lance do pilar.<sup>70</sup> O valor de  $\theta_1$  deve ser comparado ao valor mínimo:

$$\theta_1 = 0,00456 \text{ rad} \geq \theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \rightarrow \therefore \theta_1 = 0,00456 \text{ rad}$$

A excentricidade acidental por falta de reticidade é (Eq. 79):

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \rightarrow e_{ax} = e_{ay} = 0,00456 \frac{480}{2} = 1,10 \text{ cm}$$

<sup>68</sup> Os ábacos podem ser encontrados em: [http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)

<sup>69</sup> Na determinação de  $\omega$  no ábaco deve-se ter muito cuidado, pois um pequeno erro no valor poderá significar um grande erro no valor da armadura do pilar.

<sup>70</sup> Cada caso deve ser analisado, pois a altura do lance pode não coincidir com o comprimento equivalente.

A Figura 94 mostra as excentricidades que devem ser consideradas, com base na Figura 76.

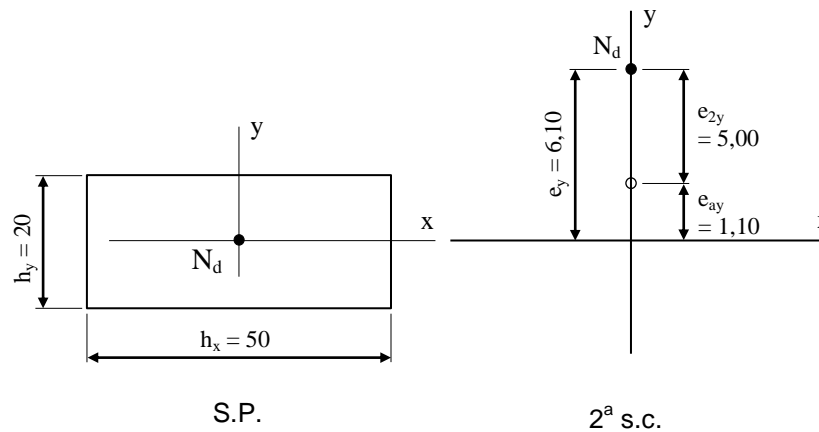


Figura 94 – Situação de projeto e de cálculo (dir. y) para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental** por falta de retilinearidade.

A armadura resulta:

$$\mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,65 \frac{6,10}{20} = 0,20 \quad ; \quad \frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20$$

$$\text{Ábaco A-4: } \omega = 0,52 \quad \rightarrow \quad A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,52 \cdot 1.000 \cdot 3,0}{43,5} = 25,62 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,\min}$ )	31,03	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,\min}$ )	27,09	- 13
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_a$ )	25,62	- 17

As armaduras neste exemplo não se apresentam tão diferentes como no Exemplo 1. O cálculo com o momento fletor mínimo, apresenta excentricidade mínima de 2,10 cm, muito maior que a excentricidade acidental da NBR 6118, de 0,84 cm, no entanto, como a excentricidade de 2ª ordem é elevada (5,00 cm), a diferença entre as excentricidades influenciou menos o valor da armadura.

### 13.1.3 Exemplo 3

Este exemplo é semelhante ao primeiro, com a diferença de uma maior força normal de compressão, de 1.000 kN para 1.400 kN (+ 40 %), Figura 95, de modo a ilustrar a influência do valor da força normal na armadura do pilar. São conhecidos:

concreto C30 ;  $d' = 4,0$  cm  
 $N_k = 1.400$  kN  
 seção transversal 20 x 50 ( $A_c = 1.000$  cm<sup>2</sup>)  
 comprimento equivalente:  $l_{ex} = l_{ey} = 280$  cm

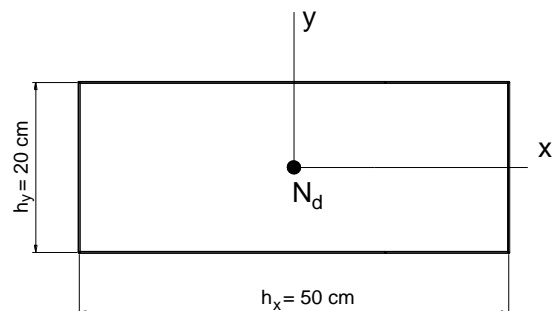


Figura 95 – Dimensões da seção transversal e posição da força normal.

**Resolução**

## a) Força normal

A força normal de cálculo é (Eq. 112):  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 1400 = 1.960 \text{ kN}$

com  $\gamma_n = 1,0$  determinado na Tabela 6, em função da largura da seção transversal do pilar.

## b) Índice de esbeltez (Eq. 61)

$$\text{Dir. x: } \lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 48,4 \leq 90 \rightarrow \text{ok! (pilar medianamente esbelto)}$$

$$\text{Dir. y: } \lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4$$

## c) Momento fletor mínimo

Como visto no Exemplo 1, a armadura do pilar resulta da direção de maior esbeltez (dir. y), de modo que os cálculos serão feitos relativos a esta direção apenas. O momento fletor mínimo na direção y (Eq. 91) é:  $M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$

$$M_{1d,\text{mín},y} = 1960 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 4.116 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 2,10 \text{ cm}$$

## d) Esbeltez limite (Eq. 81)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Nos pilares intermediários não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, daí  $e_1 = 0$  e  $\alpha_b = 1,0$  (ver item 8.3). Assim:

$$\lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 25 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 19,4 < \lambda_{1,x} = 35 \rightarrow \therefore \text{ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

$$\lambda_y = 48,4 > \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow \therefore \text{ são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.}$$

## e) Cálculo do momento fletor total e da armadura

O momento fletor total será calculado com a consideração do momento fletor mínimo, e depois com base na excentricidade acidental. Serão calculados explicitando-se os momentos fletores, bem como as excentricidades.

## e1) Com os diagramas de momentos fletores (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)

No pilar intermediário atua somente o momento fletor mínimo, ao qual deve ser acrescido o momento fletor de 2ª ordem na **direção y** neste caso (Figura 92), sendo calculado como:

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 77): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1960}{1000 \frac{3,0}{1,4}} = 0,91$$

Curvatura na dir. y (Eq. 76), com h sendo o lado  $h_y$  :

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{20(0,91+0,5)} = 1,7730 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem na **dir. y** é (Eq. 74):

$$e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10r} = \frac{280^2}{10} 1,7730 \cdot 10^{-4} = 1,39 \text{ cm}$$

O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75):  $M_{2d,y} = N_d \frac{\ell_e^2}{10r} = N_d e_{2y} = 1960 \cdot 1,39 = 2.725 \text{ kN.cm}$

Observando os diagramas da Figura 92 nota-se que o momento fletor total na **dir. y** é:

$$M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\text{mín},y} + M_{2d,y} = 4.116 + 2.725 = 6.841 \text{ kN.cm}$$

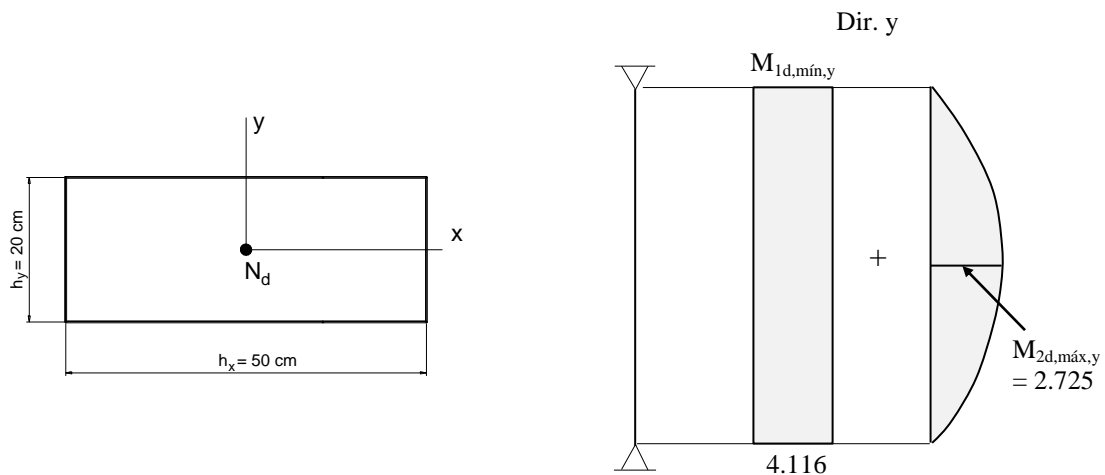


Figura 96 – Momentos fletores atuantes no pilar na direção y.

e2) Com os diagramas de excentricidades (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)

As excentricidades correspondentes aos momentos fletores para a **dir. y** estão indicadas na Figura 97, e tomam como base a Figura 67.

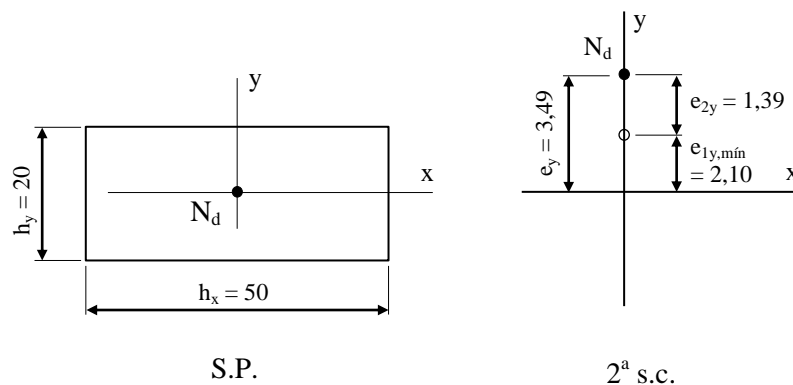


Figura 97 – Situação de projeto e situação de cálculo do pilar intermediário para a direção y.

O momento fletor total é:

$$M_{d,\text{tot},y} = N_d \cdot e_y = 1960 \cdot 3,49 = 6.840 \text{ kN.cm}$$

e3) Com a Eq. 96 (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)

$$M_{d,\text{tot}} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,\text{mín}}$$

Não existe o momento fletor  $M_{1d,A}$ , de modo que  $\alpha_b M_{1d,A} = M_{1d,\min,y} = 4.116 \text{ kN.cm}$ :

$$M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\min,y} + M_{2d,y} = 4.116 + 2.725 = 6.841 \text{ kN.cm}$$

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - Método do pilar-padrão com rigidez  $K$  aproximada)

$$19200M_{Sd,\text{tot}}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,\text{tot}} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Aplicando na dir.  $y$ , que é a direção de  $e_2$ , e fazendo  $M_{1d,A} = M_{1d,\min,y} = 4.116 \text{ kN.cm}$  e  $h_y = 20 \text{ cm}$ :

$$19200M_{Sd,\text{tot}}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1960 - 48,4^2 \cdot 20 \cdot 1960 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 4116) M_{Sd,\text{tot}} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1960 \cdot 4116 = 0$$

$$19200M_{Sd,\text{tot}}^2 - 20.327.552 M_{Sd,\text{tot}} - 6,19573 \cdot 10^{11} = 0 \rightarrow M_{Sd,\text{tot}}^2 - 1.058,7 M_{Sd,\text{tot}} - 32.269.440 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{Sd,\text{tot}} = 6.235 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,A}$ .

e5) Cálculo da armadura longitudinal

Segundo o **Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**, o momento fletor total na **dir.  $y$**  é  $M_{d,\text{tot},y} = 6.841 \text{ kN.cm}$ . Com  $\nu = 0,91$  e utilizando os ábacos de Venturini (1987)<sup>71</sup> para Flexão Reta, faz-se o cálculo de  $\mu$  (Eq. 51 ou Eq. 52) e  $d'/h$  para a **dir.  $y$** :

$$\mu = \frac{M_{d,\text{tot},y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{6841}{20 \cdot 1000 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,16 \quad \text{ou} \quad \mu = \nu \frac{e_y}{h_y} = 0,91 \frac{3,49}{20} = 0,16$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad , \text{ com o Ábaco A-4: } \omega = 0,60 \text{ (quadrante superior - Compressão), na Figura 87.}^{72}$$

$$\text{A armadura resulta de } \omega = 0,60: \quad A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,60 \cdot 1000 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 29,56 \text{ cm}^2$$

A armadura aumentou significativamente, de  $10,84 \text{ cm}^2$  (do Exemplo 1) para  $29,56 \text{ cm}^2$ , embora com uma carga de compressão apenas 40 % maior.

Se aplicado o momento fletor resultante do cálculo segundo o **Método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada**, a armadura resulta:

$$\mu = \frac{M_{d,\text{tot},y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{6235}{20 \cdot 1000 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,15$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad , \text{ e com } \nu = 0,91 \rightarrow \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,55$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,55 \cdot 1000 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 27,09 \text{ cm}^2 \rightarrow 14 \phi 16 \text{ mm (28,00 cm}^2)$$

e6) Com a excentricidade acidental (sem consideração do momento fletor mínimo)

Com a Eq. 78 é calculado o ângulo:

<sup>71</sup> Os ábacos podem ser encontrados em: [http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)

<sup>72</sup> Na determinação de  $\omega$  no ábaco deve-se ter muito cuidado, pois um pequeno erro no valor poderá significar um grande erro no valor da armadura do pilar.

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{2,8}} = 0,00598 \text{ rad}$$

com H como a altura do lance do pilar. O valor de  $\theta_1$  deve ser comparado ao valor mínimo:

$$\theta_1 = 0,00598 \geq \theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \therefore \theta_1 = 0,00598 \text{ rad}$$

A excentricidade acidental por falta de retilinearidade é (Eq. 79):

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_c}{2} \quad \rightarrow \quad e_{ax} = e_{ay} = 0,00598 \frac{280}{2} = 0,84 \text{ cm}$$

A Figura 98 mostra as excentricidades que devem ser consideradas, com base na Figura 76.

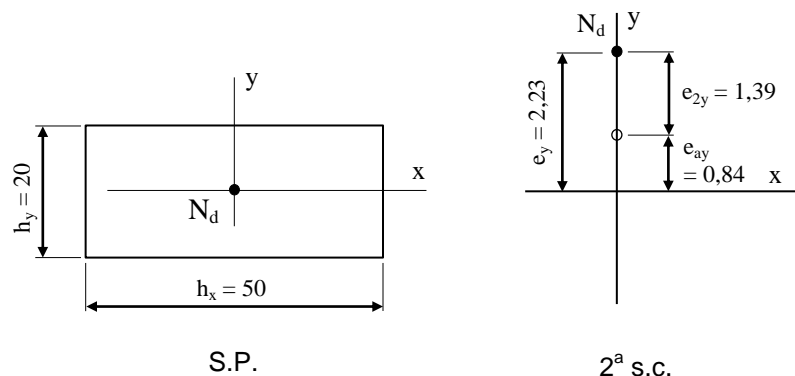


Figura 98 – Situação de projeto e de cálculo (dir. y) para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental** por falta de retilinearidade.

A armadura resulta:

$$\mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,91 \frac{2,23}{20} = 0,10 \quad ; \quad \frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20$$

$$\text{Ábaco A-4: } \omega = 0,38 \quad \rightarrow \quad A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,38 \cdot 1000 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 18,72 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,\text{mín}}$ )	29,56	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,\text{mín}}$ )	27,09	- 8
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_a$ )	18,72	- 36,7

Com o aumento de 40 % na carga  $N_k$  do Exemplo 1, verifica-se que a armadura mais que dobrou a quantidade, de 12,48 para 29,56 cm<sup>2</sup>. O cálculo com a excentricidade acidental da NBR 6118 apresentou armadura 36,7 % menor que a armadura com o momento fletor mínimo, o que é devido à diferença entre a excentricidade mínima (2,10 cm) e a excentricidade acidental (0,84 cm).

Embora apenas três exemplos numéricos tenham sido apresentados, pelos valores obtidos pode-se observar que o *método do pilar-parão com rigidez aproximada* resulta armaduras um pouco inferiores às do *método do pilar-parão com curvatura aproximada*, com diferença mais significativa no Exemplo 1. E recomendamos o cálculo com o momento fletor mínimo, que apresenta valores de armadura semelhantes aos valores obtidos com a norma anterior a 2003 (NB 1/78), até que os modelos sejam calibrados com valores experimentais.

### 13.1.4 Exemplo 4

Dimensionar a armadura de um pilar de construção de pequeno porte com dois pavimentos (sobrado), sendo conhecidos (Figura 99):

concreto C25 ;  $d' = 3,0$  cm  
 $N_k = 220$  kN  
 seção transversal 14 x 30 ( $A_c = 420$  cm<sup>2</sup>)  
 comprimento equivalente:  $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280$  cm

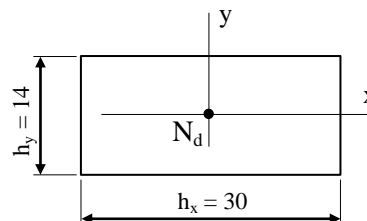


Figura 99 – Dimensões da seção transversal e posição da força normal.

## Resolução

### a) Força normal

Para a largura de 14 cm, na Tabela 6 encontra-se o coeficiente  $\gamma_n = 1,25$ , e a força normal de cálculo é (Eq. 112):  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,25 \cdot 1,4 \cdot 220 = 385$  kN

### b) Índice de esbeltez (Eq. 61)

$$\text{Dir. x: } \lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{30} = 32,3$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 69,2 \leq 90 \rightarrow \text{ok! (pilar medianamente esbelto)}$$

$$\text{Dir. y: } \lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{14} = 69,2$$

### c) Momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo (Eq. 91) é:  $M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$

$$M_{1d,\text{mín},x} = 385 (1,5 + 0,03 \cdot 30) = 924 \text{ kN.cm} ; e_{1x,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 30) = 2,40 \text{ cm}$$

$$M_{1d,\text{mín},y} = 385 (1,5 + 0,03 \cdot 14) = 739 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 14) = 1,92 \text{ cm}$$

### d) Esbeltez limite (Eq. 81)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Nos pilares intermediários não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, assim  $e_1 = 0$  e  $\alpha_b = 1,0$  (ver item 8.3), e:

$$\lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 25 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 32,3 < \lambda_{1,x} = 35 \rightarrow \therefore \text{não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

$$\lambda_y = 69,2 > \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow \therefore \text{são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.}$$

### e) Cálculo do momento fletor total e da armadura

#### e1) Com os diagramas de momentos fletores (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)

No pilar intermediário atua somente o momento fletor mínimo, ao qual na direção **y** deve ser acrescido o momento fletor de 2ª ordem (Figura 100), sendo:

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 77): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{385}{420 \frac{2,5}{1,4}} = 0,51$$

Curvatura na direção **y** (Eq. 76), com **h** sendo o lado  $h_y$  :

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{14(0,51+0,5)} = 3,5244 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{14} = 3,57 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem na direção **y** é (Eq. 74):

$$e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{280^2}{10} 3,5244 \cdot 10^{-4} = 2,76 \text{ cm}$$

$$\text{O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75): } M_{2d,y} = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = N_d e_{2y} = 385 \cdot 2,76 = 1.064 \text{ kN.cm}$$

Na **dir. x** atua somente o momento fletor mínimo, e o momento fletor total é:  $M_{d,tot,x} = M_{1d,mín,x} = 924$  kN.cm. Na **dir. y** o momento fletor total é a soma dos momentos fletores de 1ª e 2ª ordem (Figura 100):

$$M_{d,tot,y} = M_{1d,mín,y} + M_{2d,y} = 739 + 1.064 = 1.803 \text{ kN.cm}$$

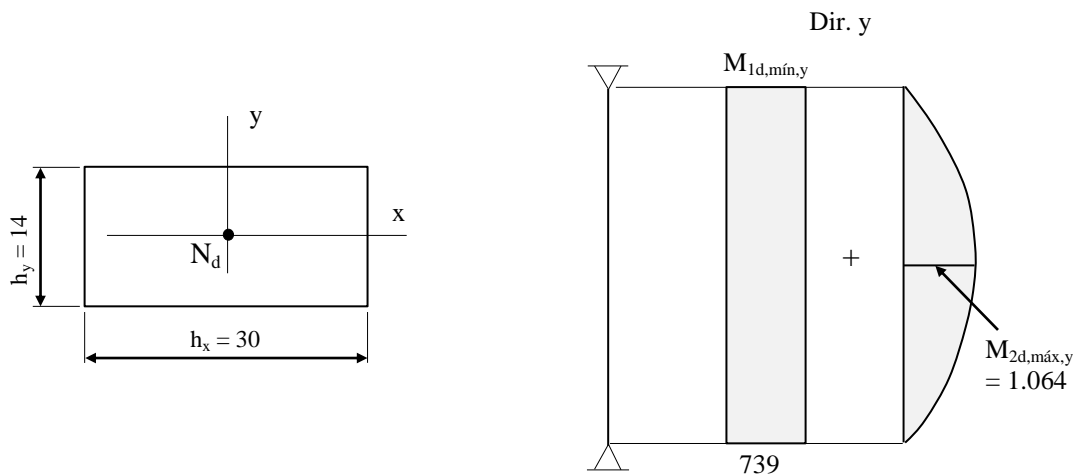


Figura 100 – Momentos fletores atuantes no pilar na direção **y**.

e2) Com os diagramas de excentricidades (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

As excentricidades correspondentes aos momentos fletores da **dir. y** estão indicadas na Figura 101, com base na Figura 67.

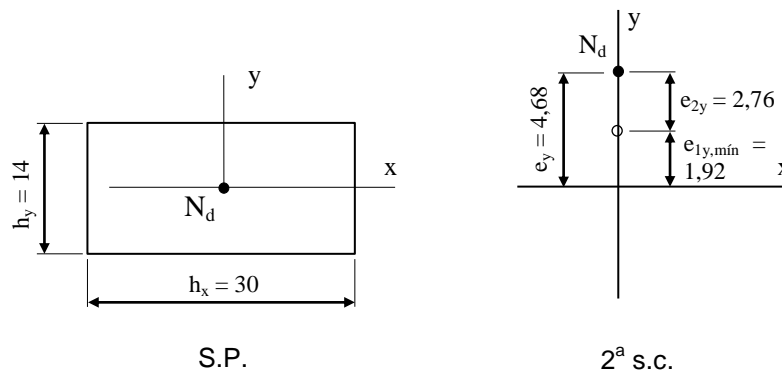


Figura 101 – Situação de projeto e situação de cálculo do pilar intermediário para a direção **y**.

O momento fletor total na **dir. y** é:

$$M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_y = 385 \cdot 4,68 = 1.802 \text{ kN.cm}$$

e3) Cálculo da armadura longitudinal

Com  $v = 0,51$  faz-se o cálculo de  $\mu$  (Eq. 51 ou Eq. 52) e  $d'/h$  para a **dir. y**:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1803}{14 \cdot 420 \frac{2,5}{1,4}} = 0,17 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,51 \frac{4,68}{14} = 0,17$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{3,0}{14} = 0,21 \cong 0,20 \quad , \text{ com o \u00c1baco A-4 de Venturini (1987, Figura 87): } \omega = 0,32$$

$$\text{A armadura resulta: } A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,32 \cdot 420 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 5,52 \text{ cm}^2 \quad (8 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 6,40 \text{ cm}^2)$$

## 13.2 Pilares de Extremidade

Os exemplos num\u00e9ricos a seguir s\u00e3o de pilares de extremidade, apoiados na base e no topo, de n\u00f3s fixos (pilar contraventado) e sem for\u00e7as transversais (horizontais) atuantes. Os c\u00e1lculos ser\u00e3o feitos mostrando-se os diagramas de momentos fletores solicitantes e tamb\u00e9m as excentricidades, como mostrado no item 10.1.2.1, considerando-se o **momento fletor m\u00ednimo** ou a **excentricidade acidental** por falta de retilineidade.

Os seguintes dados s\u00e3o comuns em todos os exemplos: coeficientes de pondera\u00e7\u00e3o:  $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ ; a\u00e7o CA-50 ( $f_{yd} = 50/1,15 \cong 43,5 \text{ kN/cm}^2$ );  $d' = 4 \text{ cm}$ .

### 13.2.1 Exemplo 1

Para o pilar mostrado na Figura 102, calcular a armadura longitudinal necess\u00e1ria. Este exemplo \u00e9 semelhante \u00e0quele encontrado em Fusco (1981, p. 297), com a diferen\u00e7a da altera\u00e7\u00e3o do concreto, de C15 para C25,<sup>73</sup> e da largura do pilar, de 25 cm para 20 cm. S\u00e3o conhecidos:

<sup>73</sup> At\u00e9 a d\u00e9cada de 70 do s\u00e9culo passado eram comuns os concretos C13,5 e C15. Na d\u00e9cada de 80 foram comuns o C15 e o C18, e que foram sendo substituídos gradativamente pelos C20 e C25. E nos \u00faltimos quinze anos s\u00e3o mais aplicados nos edif\u00edcios o C30 e C35, e at\u00e9 com resist\u00eancias maiores, como C40 ou superiores.

$N_k = 1.110 \text{ kN}$   
 $M_{1d,A,x} = - M_{1d,B,x} = 2.170 \text{ kN.cm}$   
 seção transversal 20 x 70 cm  
 $(A_c = 1.400 \text{ cm}^2)$   
 comprimento equivalente:  
 $l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$

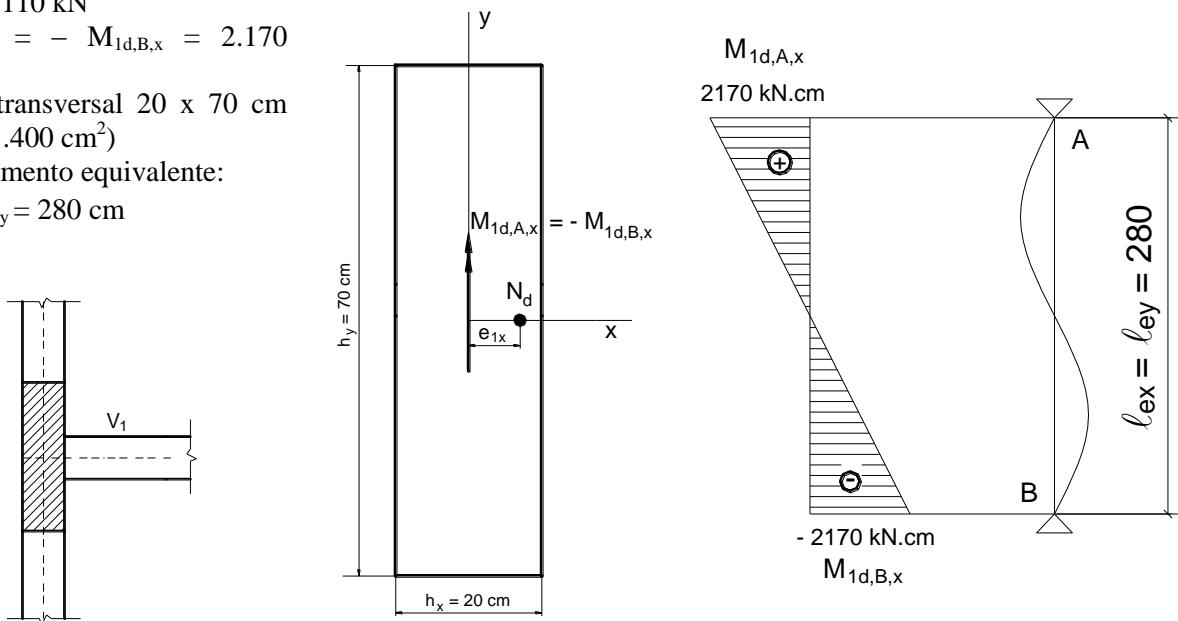


Figura 102 – Arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma, dimensões da seção transversal e momentos fletores de cálculo de 1ª ordem atuantes na direção x do pilar.

**Resolução**

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é (Eq. 112):  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 1110 = 1.554 \text{ kN}$ , com  $\gamma_n = 1,0$  na Tabela 6. Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores nas extremidades do pilar ( $M_{1d,A,x} = - M_{1d,B,x} = 2.170 \text{ kN.cm}$ ), que o solicitam na direção x, em função de existir a viga V1 não contínua sobre o pilar na direção x (Figura 102 e Figura 103). Estes momentos fletores de 1ª ordem são valores de cálculo, já majorados pelos coeficientes de ponderação  $\gamma_f$  e  $\gamma_n$ .<sup>74</sup> Como os momentos fletores são iguais, a excentricidade inicial de 1ª ordem também é igual (em módulo) na base e no topo do pilar:

$$e_{1x} = \frac{M_{1d,x}}{N_d} \rightarrow e_{1x,A} = - e_{1x,B} = \frac{2.170}{1.554} = 1,40 \text{ cm}$$

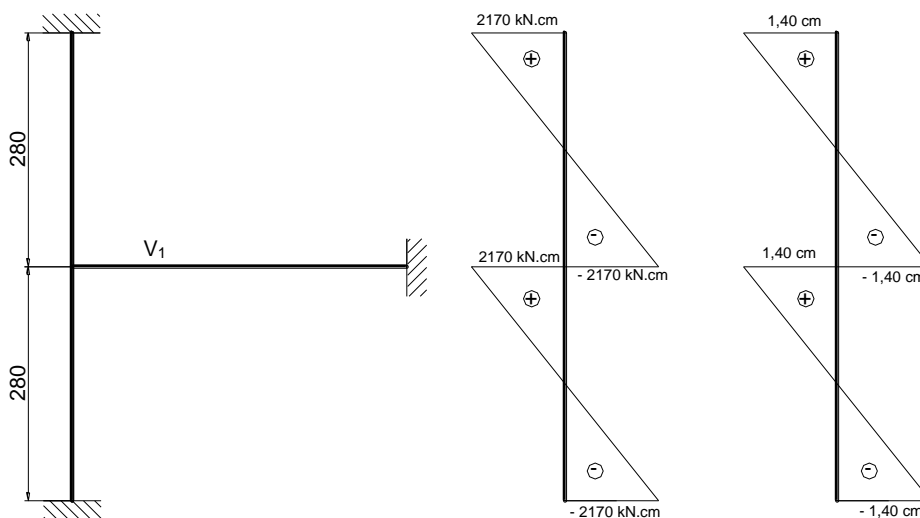


Figura 103 – Momentos fletores de cálculo de 1ª ordem e excentricidades no topo e na base do pilar, na direção x.

<sup>74</sup> Todos os esforços solicitantes devem ser majorados por  $\gamma_n$ , e não somente a força normal.

Em função dos momentos fletores de 1ª ordem existentes no pilar, percebe-se que o melhor posicionamento para a armadura longitudinal, aquele que é mais racional e econômico, é com as barras de aço distribuídas ao longo das duas faces maiores (dimensão  $h_y$ , ver Figura 102). A armadura simétrica, com barras em ambas as faces do pilar, proporciona resistência aos momentos fletores de 1ª ordem aplicados no topo e na base.

b) *Índice de esbeltez (Eq. 61)*

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4 \quad (\text{pilar medianamente esbelto na dir. x, ver Eq. 62})$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 48,4 \leq 90 \rightarrow \text{ok!}$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{70} = 13,8 \quad (\text{pilar curto na dir. y})$$

c) *Momento fletor mínimo (Eq. 91)*

$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$ , com  $h$  em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção, é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\text{mín},x} = 1.554 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 3.263 \text{ kN.cm} ; e_{1x,\text{mín}} = \frac{3.263}{1.554} = 2,10 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\text{mín},y} = 1.554 (1,5 + 0,03 \cdot 70) = 5.594 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\text{mín}} = \frac{5.594}{1.554} = 3,60 \text{ cm}$$

d) *Esbeltez limite*

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \quad \text{com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** a excentricidade de 1ª ordem ( $e_1$ ) é 1,40 cm, e como os momentos fletores de 1ª ordem ( $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.170 \text{ kN.cm}$ )<sup>75</sup> são menores que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\text{mín},x} = 3.263 \text{ kN.cm}$ ), tem-se que  $\alpha_{b,x} = 1,0$  (ver item 8.3), e:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,40}{20}}{1,0} = 25,9 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

**Dir. y:** não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, portanto,  $e_{1y} = 0$  e  $\alpha_{b,y} = 1,0$ , e:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{70}}{1,0} = 25,0 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 48,4 > \lambda_{1,x} \rightarrow \therefore$  **são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 13,8 < \lambda_{1,y} \rightarrow \therefore$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

Em pilares retangulares correntes, geralmente a armadura final resulta da direção correspondente à largura do pilar, devido aos efeitos locais de 2ª ordem. No pilar deste exemplo em particular isso é certo, pois na direção da largura ocorre o momento fletor de 1ª ordem e o  $M_{2d,x}$ , sendo portanto suficiente a análise apenas da **direção x**.<sup>76</sup> Porém, com fins didáticos os cálculos para a **direção y** também serão mostrados.

e) *Cálculo do momento fletor total e da armadura*

<sup>75</sup> Se os momentos de 1ª ordem forem diferentes ( $M_A$  e  $M_B$ ), deve ser considerado o maior, o  $M_A$ .

<sup>76</sup> Esta análise deve ser feita com muito cuidado em função das diversas possibilidades de solicitação de um pilar.

O momento fletor total será calculado com a consideração do **momento fletor mínimo**, e depois com a consideração da **excentricidade accidental**, explicitando-se os momentos fletores e também as excentricidades.

e1) Com os diagramas de momentos fletores (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

Na **direção x** do pilar ocorrem efeitos locais de 2ª ordem ( $e_2$  e  $M_2$ ), com o seguinte cálculo:

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 77): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1.554}{1.400 \frac{2,5}{1,4}} = 0,62$$

Curvatura na dir. x (Eq. 76), com  $h = h_x = 20$  cm:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{20(0,62+0,5)} = 2,2321 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h} = \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem é (Eq. 74):

$$e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10 r} = \frac{280^2}{10} 2,2321 \cdot 10^{-4} = 1,75 \text{ cm}$$

$$\text{O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75): } M_{2d,x} = N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} = N_d \cdot e_{2x} = 1554 \cdot 1,75 = 2.720 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 104. Deve ser determinado o momento fletor total, em cada direção (ver a Figura 68). Na **direção x**, onde ocorre o momento fletor de 2ª ordem, o momento fletor total (máximo) ocorrerá na seção de extremidade ou na seção intermediária C, sendo que neste exemplo os momentos fletores de 1ª ordem nas duas extremidades são iguais (em módulo). Quando são diferentes, deve-se considerar a extremidade com o maior momento fletor de 1ª ordem, o  $M_{1d,A}$ . Neste exemplo, a rigor, não seria necessário considerar a **direção y**, pois a armadura do pilar resultará dos momentos fletores da **direção x**, que é a direção de maior esbeltez e onde além disso ocorre o momento fletor de 2ª ordem.

**Dir. x:**

$$\text{Seção de extremidade (A): } M_{d,tot,x} \geq \begin{cases} M_{1d,A,x} = 2.170 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,x} = 3.263 \text{ kN.cm} \end{cases} \rightarrow \therefore M_{d,tot,x} = 3.263 \text{ kN.cm}$$

Para a seção intermediária C, deve ser determinado o momento fletor de 1ª ordem  $M_{1d,C,x}$  (Eq. 93):

$$M_{1d,C,x} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A,x} + 0,4 M_{1d,B,x} \\ 0,4 M_{1d,A,x} \end{cases} \rightarrow M_{1d,C,x} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot 2.170 + 0,4 (-2.170) = 434 \text{ kN.cm} \\ 0,4 \cdot 2.170 = 868 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$\therefore M_{1d,C,x} = 868 \text{ kN.cm}$ , porém, não se pode considerar momento fletor menor que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,mín,x} = 3.263 \text{ kN.cm}$ ), de modo que o momento fletor total na seção intermediária da **dir. x** é:

$$M_{d,tot,x} = M_{1d,mín,x} + M_{2d,x} = 3.263 + 2.720 = 5.983 \text{ kN.cm}$$

valor a ser considerado no cálculo da armadura, pois resultou maior que o calculado para a seção de extremidade.

$$\text{Dir. y: } M_{d,tot,y} = M_{1d,mín,y} = 5.594 \text{ kN.cm}$$

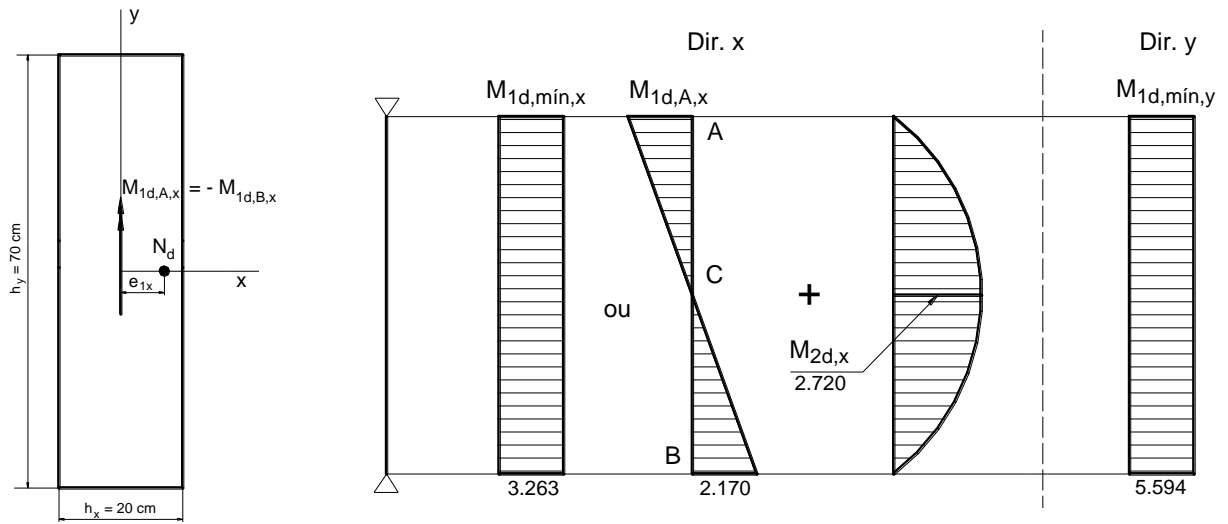


Figura 104 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

e2) Com os diagramas de excentricidades (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

As situações de projeto e de cálculo, para as seções de extremidade e intermediária, estão mostradas na Figura 105 e Figura 106. Como as seções de extremidade de topo e base do pilar estão submetidas a momento fletor de 1ª ordem de igual valor, embora de sinais diferentes,<sup>77</sup> a seção de extremidade mostrada na Figura 105 é representativa de ambas as extremidades do pilar.<sup>78</sup> Nas seções de topo e base não ocorre deformação de 2ª ordem ( $e_2 = 0$ , ver Figura 69), a qual deve ser considerada na seção intermediária C (ver Figura 70). Na seção de extremidade na **direção x** (1ª s.c.) deve ser considerada a maior excentricidade entre a de 1ª ordem ( $e_{1x,A} = 1,40$  cm) e a relativa ao momento fletor mínimo ( $e_{1x,min} = 2,10$  cm).

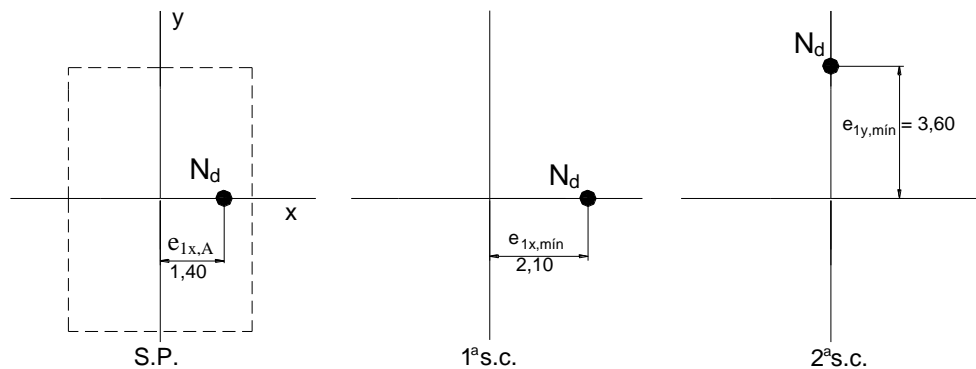


Figura 105 – Situações de projeto e de cálculo das seções de extremidade (topo e base).

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 95, que corresponde à Eq. 93 (relativa aos momentos fletores), em função da excentricidade inicial ( $e_{1x}$ ), nas extremidades submetidas aos momentos fletores de 1ª ordem ( $M_{1d,A}$  e  $M_{1d,B}$ ):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 1,40 + 0,4 \cdot (-1,40) = 0,28 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 1,40 = 0,56 \text{ cm} \end{cases}$$

$\therefore e_{1x,C} = 0,56$  cm

Na situação de cálculo relativa à **direção x** (1ª s.c.) deve ser considerada a maior excentricidade entre a de 1ª ordem ( $e_{1x,C} = 0,56$  cm) e a relativa ao momento fletor mínimo ( $e_{1x,min} = 2,10$  cm), (ver Figura 70).

<sup>77</sup> Os momentos fletores de 1ª ordem  $M_{1d,A} = -M_{1d,B}$  tracionam o pilar em bordas opostas, no entanto, a armadura simétrica (nas duas bordas) que será escolhida resolve este problema e atende a ambos os momentos fletores.

<sup>78</sup> No caso de momentos fletores na base e topo diferentes, deve-se considerar a seção de extremidade submetida ao maior momento fletor ( $M_{1d,A}$ ).

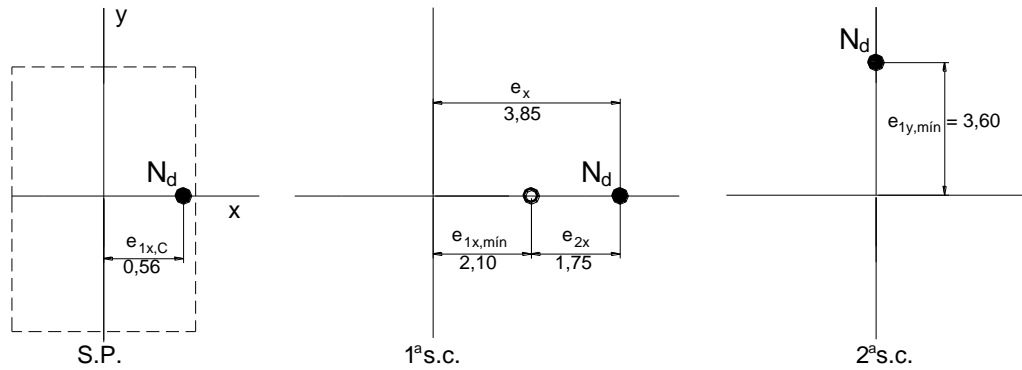


Figura 106 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária C.

O momento fletor total (máximo) é resultante da maior excentricidade em cada direção:

**Dir. x:**  $M_{d,tot,x} = N_d \cdot e_x = 1554 \cdot 3,85 = 5.983 \text{ kN.cm}$  (1ª s.c. da seção intermediária)

**Dir. y:**  $M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_{1y,min} = 1554 \cdot 3,60 = 5.594 \text{ kN.cm}$

e3) Com a Eq. 96 (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

**Dir. x:** tem-se  $\alpha_b M_{1d,A} = 1,0 \cdot 2.170 = 2.170 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,min} = 3.263 \text{ kN.cm}$ , portanto aplica-se na equação o momento fletor mínimo:

$$M_{d,tot,x} = 3.263 + 1.554 \frac{280^2}{10} 2,2321 \cdot 10^{-4} = 5.983 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,A,x} = 2.170 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

**Dir. y:** não existem momentos fletores  $M_A$  e  $M_2$ , portanto:  $M_{d,tot,y} = M_{1d,min,y} = 5.594 \text{ kN.cm}$  <sup>(Nota 79)</sup>

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*)

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,tot} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Na **direção x** tem-se  $h = h_x = 20 \text{ cm}$ ,  $M_{1d,A,x} = 2.170 \text{ kN.cm}$  e  $M_{1d,min,x} = 3.263 \text{ kN.cm}$ , e considerando que deve-se ter  $M_{1d,A,x} \geq M_{1d,min,x}$ , para o valor  $M_{1d,A}$  da equação será aplicado o momento fletor mínimo:

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1554 - 48,4^2 \cdot 20 \cdot 1554 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 3.263) M_{Sd,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1554 \cdot 3.263 = 0$$

$$19200M_{Sd,tot}^2 - 16.109.165 M_{Sd,tot} - 3.894.299 \cdot 10^{11} = 0 \rightarrow M_{Sd,tot}^2 - 839,0 M_{Sd,tot} - 20.282.808 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{Sd,tot} = 4.943 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,A} = 2.170 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$

e5) *Cálculo da armadura longitudinal*

Como já comentado e conforme análise da Figura 104, Figura 105 e Figura 106, a armadura do pilar resultará do cálculo relativo à **direção x**, de maior esbeltez e maior momento fletor total. Segundo o *Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*, o momento fletor total é  $M_{d,tot,x} = 5.983 \text{ kN.cm}$ . Com  $v = 0,62$  e utilizando os ábacos de Venturini (1987) para *Flexão Reta*, faz-se o cálculo de  $\mu$  (Eq. 51 ou Eq. 52) e  $d'/h$  para a **dir. x**:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{5983}{20 \cdot 1400 \cdot \frac{2,5}{1,4}} = 0,12 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,62 \frac{3,85}{20} = 0,12$$

<sup>79</sup> Como se pode notar, o cálculo do momento fletor total é muito simples, rápido e direto com a aplicação da equação da NBR6118. Por outro lado, os desenhos dos diagramas de momentos fletores e das excentricidades têm a intenção de facilitar o aprendizado inicial do estudante.

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,19 \quad , \text{ e a armadura longitudinal é (Eq. 53):}$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,19 \cdot 1400 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 10,92 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad 10 \phi 12,5 \text{ mm (12,50 cm}^2\text{)}$$

No detalhamento da armadura longitudinal do pilar deve-se tomar cuidado de posicionar as barras de aço de acordo com o arranjo de barras do ábaco escolhido, A-4 neste caso, como apresentado no Exemplo 1 dos pilares intermediários.

Se aplicado o momento fletor total resultante do cálculo segundo o *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*, a armadura resulta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4943}{20 \cdot 1400 \frac{2,5}{1,4}} = 0,10 \quad \rightarrow \quad \text{com } d'_x/h_x = 0,20 \text{ e } v = 0,62: \text{ Ábaco A-4: } \omega = 0,10$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,10 \cdot 1400 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 5,75 \text{ cm}^2$$

e6) Com as excentricidades acidentais (sem consideração do momento fletor mínimo)

Como se observa na Figura 60, a excentricidade por **falta de retitudez** é considerada na seção intermediária C, onde a excentricidade de 1ª ordem é  $e_{1x,C} = 0,56$  cm. Com a Eq. 78 e Eq. 79 são calculados os valores:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{2,8}} = 0,00598 \text{ rad} \quad , \text{ com } H = 2,8 \text{ m (altura do lance do pilar)}$$

Comparando com o valor mínimo:  $\theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333$  rad  $\rightarrow \therefore \theta_1 = 0,00598$  rad

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \quad \rightarrow \quad e_{ax} = e_{ay} = 0,00598 \frac{280}{2} = 0,84 \text{ cm}$$

Com base na Figura 78 as excentricidades que ocorrem no pilar são mostradas na Figura 107.

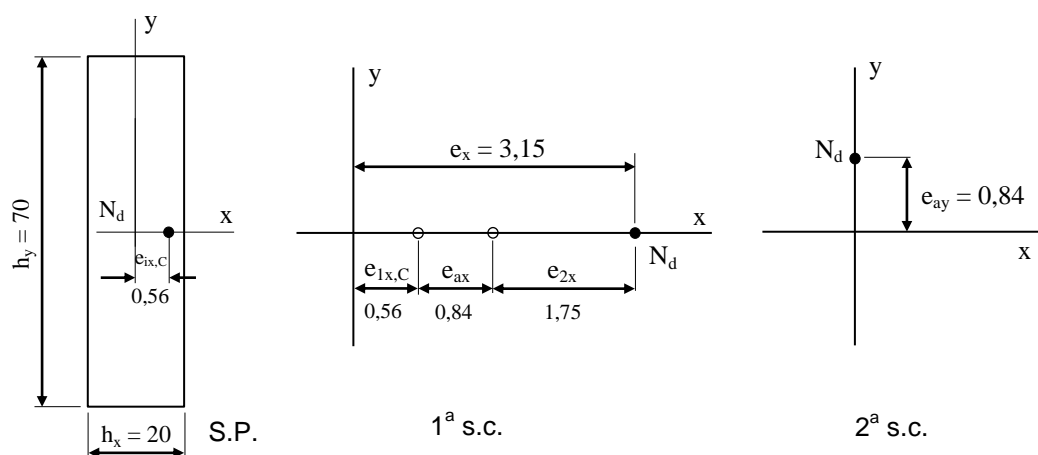


Figura 107 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental** por falta de retitudez.

A armadura resulta:

$$\mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,62 \frac{3,15}{20} = 0,10 \quad \rightarrow \quad \text{com } d'_x/h_x = 0,20 \text{ e } v = 0,62: \text{ Ábaco A-4: } \omega = 0,10$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,10 \cdot 1400 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 5,75 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,mín}$ )	10,92	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,mín}$ )	5,75	- 48
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_a$ )	5,75	- 48

### 13.2.2 Exemplo 2

Para o pilar mostrado na Figura 108, calcular a armadura longitudinal necessária. São conhecidos:

concreto C25

$$N_k = 1.110 \text{ kN}$$

$$M_{1d,A,x} = 7.000 \text{ kN.cm} ; M_{1d,B,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$$

seção transversal 20 x 70 ( $A_c = 1.400 \text{ cm}^2$ )

comprimento equivalente ou de flambagem:

$$l_{ex} = l_{ey} = 460 \text{ cm}$$

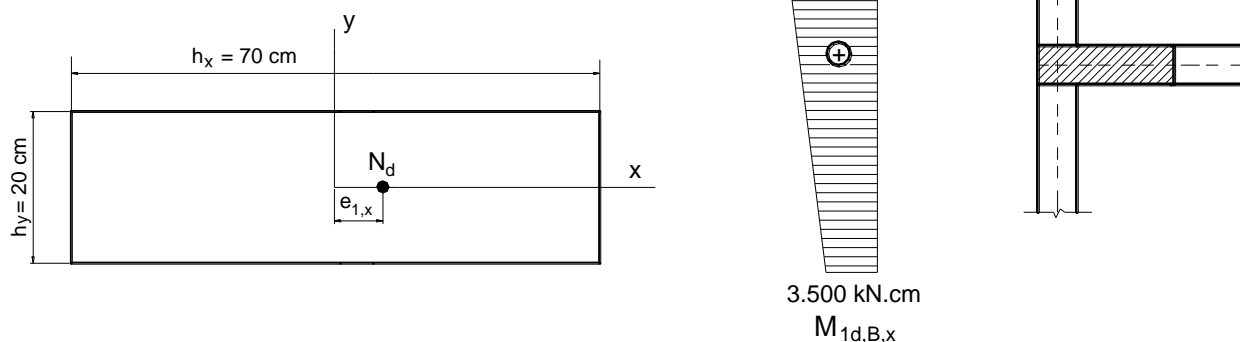


Figura 108 – Dimensões da seção transversal, arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma e momentos fletores de primeira ordem na direção x.

#### Resolução

##### a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é (Eq. 112):  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 1110 = 1.554 \text{ kN}$ , com  $\gamma_n = 1,0$  na Tabela 6. Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores de 1ª ordem na **direção x**, ao longo da altura do pilar e com valores nas extremidades (topo:  $M_{1d,A,x} = 7.000 \text{ kN.cm}$  e base:  $M_{1d,B,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$ ), advindo da ligação do pilar com a viga da **direção x**. Estes momentos fletores são valores de cálculo (já estão majorados pelos coeficientes de ponderação  $\gamma_n$  e  $\gamma_f$ ). As excentricidades de 1ª ordem na **direção x** são:

$$\text{- topo: } e_{1x,A} = \frac{M_{1d,A,x}}{N_d} = \frac{7.000}{1.554} = 4,50 \text{ cm} \quad ; \quad \text{- base: } e_{1x,B} = \frac{M_{1d,B,x}}{N_d} = \frac{3.500}{1.554} = 2,25 \text{ cm}$$

##### b) Índice de esbeltez (Eq. 61)

$$\lambda_x = \frac{3,46 l_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 460}{70} = 22,7$$

$$\rightarrow \lambda_{máx} = 79,6 \leq 90 \rightarrow \text{ok! (pilar medianamente esbelto)}$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 l_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 460}{20} = 79,6$$

c) *Momento fletor mínimo*

$M_{1d,mín} = N_d (1,5 + 0,03 h)$ , com **h** em cm. Os momentos fletores mínimos são:

**Dir. x:**  $M_{1d,mín,x} = 1.554 (1,5 + 0,03 \cdot 70) = 5.594 \text{ kN.cm}$  ;  $e_{1x,mín} = (1,5 + 0,03 \cdot 70) = 3,60 \text{ cm}$

**Dir. y:**  $M_{1d,mín,y} = 1.554 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 3.263 \text{ kN.cm}$  ;  $e_{1y,mín} = (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 2,10 \text{ cm}$

d) *Eslbeltez limite*

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** como o maior momento fletor de 1ª ordem ( $M_{1d,A,x} = 7.000 \text{ kN.cm}$ ) é maior que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,mín,x} = 5.594 \text{ kN.cm}$ ), os valores de  $\alpha_b$  e  $\lambda_{1,x}$  devem ser determinados (ver item 8.3):

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{3500}{7000} = 0,8 \geq 0,4 \quad \rightarrow \quad \therefore \alpha_{b,x} = 0,8$$

E com a excentricidade de 1ª ordem  $e_{1x,A} = 4,50 \text{ cm}$ , relativa à  $h_y = 70 \text{ cm}$ :

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{4,50}{70}}{0,8} = 32,3 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

**Dir. y:** não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, portanto  $e_{1y} = 0$  e  $\alpha_{b,y} = 1,0$ , e:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{20}}{1,0} = 25,0 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 22,7 < \lambda_{1,x} = 35 \quad \rightarrow$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 79,6 > \lambda_{1,y} = 35 \quad \rightarrow$  **são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y ( $e_2$  e  $M_2$ ).

No pilar deste exemplo existe um elevado momento fletor de 1ª ordem na **dir. x**, no entanto, a **dir. y** será a crítica, devido aos efeitos locais de 2ª ordem ( $e_2$  e  $M_{2d}$ ) na direção da largura do pilar, de modo que conduzirá à armadura final do pilar. Neste texto, as duas direções serão analisadas para um melhor conhecimento.

e) *Cálculo dos momentos fletores totais e da armadura*

Os cálculos serão demonstrados com a consideração do **momento fletor mínimo** e da **excentricidade acidental**, explicitando-se os diagramas de momentos fletores e de excentricidades.

e1) *Com os diagramas de momentos fletores (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)*

Cálculo dos efeitos locais de 2ª ordem na **direção y**. A força normal adimensional é (Eq. 77):

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1554}{1400 \frac{2,5}{1,4}} = 0,62$$

Curvatura na **dir. y** (Eq. 76), com  $h = h_y = 20 \text{ cm}$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,50)} = \frac{0,005}{20(0,62 + 0,5)} = 2,2321 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h} = \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem é (Eq. 74):

$$e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{460^2}{10} 2,2321 \cdot 10^{-4} = 4,72 \text{ cm}$$

O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75):  $M_{2d,y} = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = N_d e_{2y} = 1554 \cdot 4,72 = 7.339 \text{ kN.cm}$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 109. Deve ser determinado o momento fletor total (máximo), em cada direção (ver Figura 68).

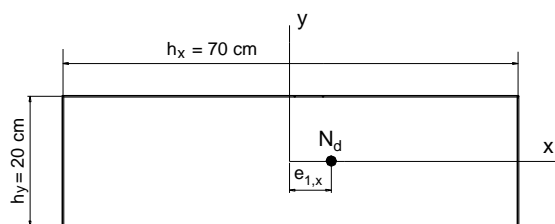
**Dir. x:**

$$\text{Seção de extremidade (A): } M_{d,\text{tot},x} \geq \begin{cases} M_{1d,A,x} = 7.000 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,\text{mín},x} = 5.594 \text{ kN.cm} \end{cases} \rightarrow \therefore M_{d,\text{tot},x} = 7.000 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:** nessa direção atuam apenas os momentos fletores mínimo e de 2ª ordem, de modo que o momento fletor total ocorre na seção intermediária C:

$$M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\text{mín},y} + M_{2d,y} = 3.263 + 7.339 = 10.602 \text{ kN.cm}$$

Portanto, a **direção y** é realmente a direção crítica, pois além do maior momento fletor total, este ocorre na direção de menor rigidez do pilar (ou de maior esbelteza).



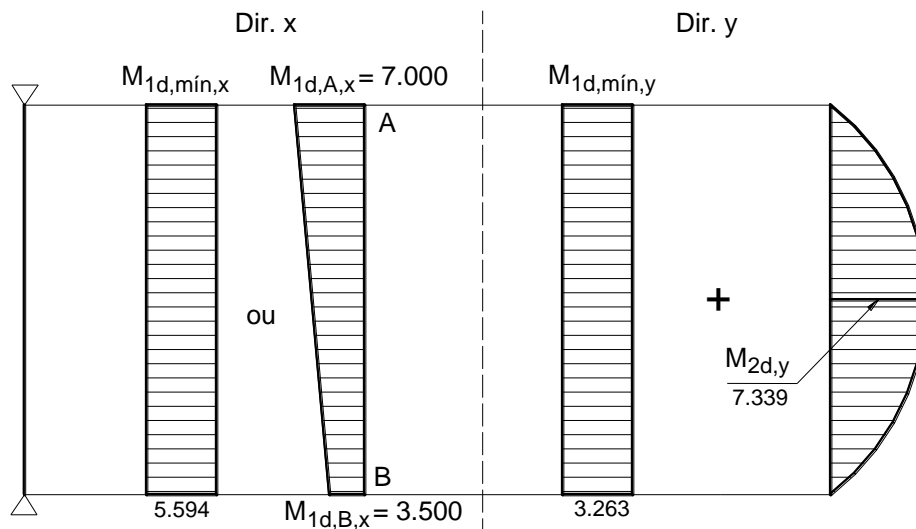


Figura 109 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

e2) Com os diagramas das excentricidades (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

As situações de projeto e de cálculo, para as seções de extremidade e intermediária C, estão mostradas na Figura 110 e Figura 111. A seção de extremidade que interessa é a de topo, submetida ao maior momento fletor de 1ª ordem ( $M_{1d,A}$ ). Nas seções de extremidade não ocorre deformação de 2ª ordem ( $e_2 = 0$ ), que deve ser considerada apenas na seção intermediária C (ver Figura 69 e Figura 70). Nas situações de cálculo relativas à **direção x** deve ser feita a comparação entre a excentricidade de 1ª ordem e a relativa ao momento fletor mínimo. A simplificação sugerida por Fusco (1981) foi considerada e a opção de *Flexão Composta Oblíqua* na 2ª s.c. não foi adotada (ver Figura 69 e Figura 70).

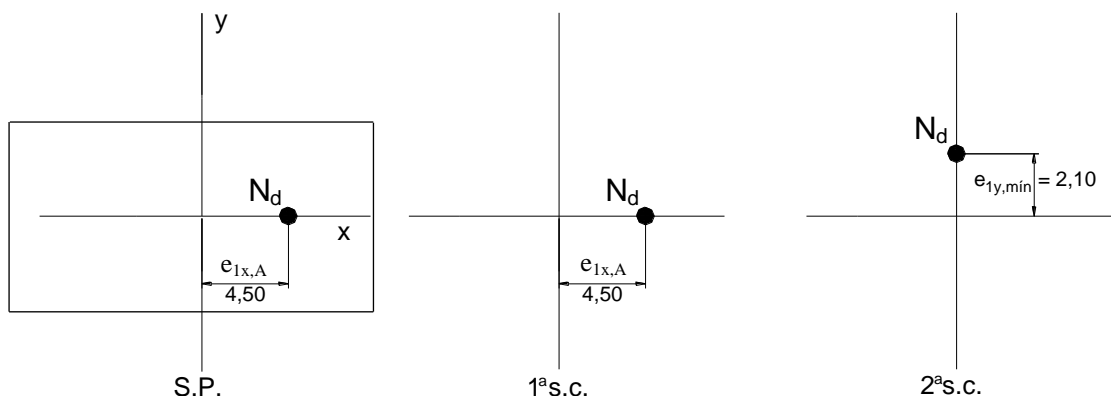


Figura 110 – Situações de projeto e situações de cálculo na seção de extremidade A (topo).

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 95, em função das excentricidades iniciais de 1ª ordem ( $e_{1x}$ ) nas extremidades (ver Figura 70):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 4,50 + 0,4 \cdot (2,25) = 3,60 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 4,50 = 1,80 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 3,60 \text{ cm} \geq e_{1x,\text{mín}} = 3,60 \text{ cm} \rightarrow \text{ok! (ver Figura 70)}$$

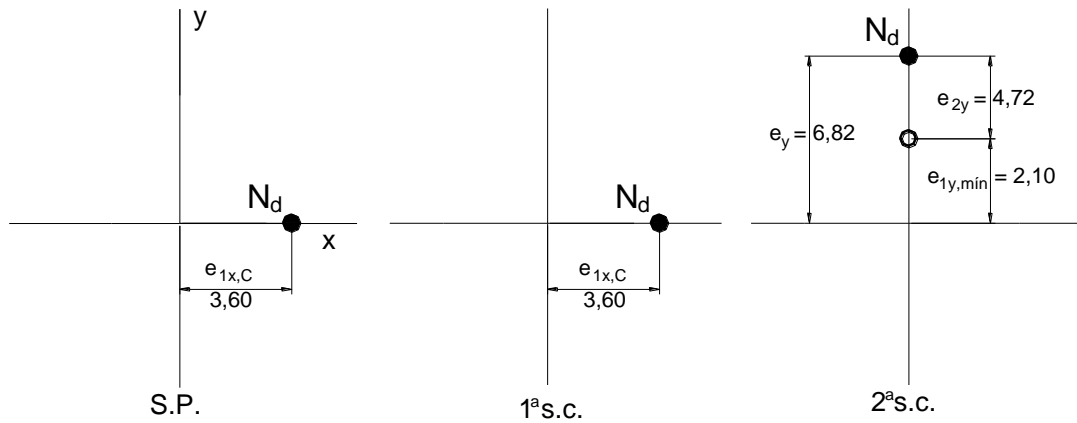


Figura 111 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária C.

Considerando as situações de cálculo com a maior excentricidade em cada direção, os momentos fletores totais (máximos) são:<sup>80</sup>

$$\text{Dir. x: } M_{d,tot,x} = N_d \cdot e_{1x} = 1554 \cdot 4,50 = 6.993 \cong 7.000 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_y = 1554 \cdot 6,82 = 10.598 \cong 10.602 \text{ kN.cm}$$

e3) Com a Eq. 96 (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10r} \geq M_{1d,A}, \quad \text{com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$$

$$\text{Dir. x: com } \alpha_{b,x} = 0,8 \text{ tem-se: } \alpha_{b,x} M_{1d,A,x} = 0,8 \cdot 7.000 = 5.600 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min,x} = 5.594 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,tot,x} = 5.600 + 0 = 5.600 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,A,x} \rightarrow \therefore M_{d,tot,x} = M_{1d,A,x} = 7.000 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:** não existe momento fletor  $M_A$ , de modo que  $\alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,\min,y} = 3.263 \text{ kN.cm}$ , portanto:

$$M_{d,tot,y} = 3.263 + 1.554 \frac{460^2}{10} 2,2321 \cdot 10^{-4} = 10.603 \text{ kN.cm}$$

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*)

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,tot} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Para a **dir. y**, com  $h = h_y = 20 \text{ cm}$ ,  $\lambda_y = 79,6$ ,  $\alpha_{b,y} = 1,0$ , e aplicando  $M_{1d,A} = M_{1d,\min,y} = 3.263 \text{ kN.cm}$ , tem-se:

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1554 - 79,6^2 \cdot 20 \cdot 1554 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 3.263) M_{Sd,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1554 \cdot 3.263 = 0$$

$$19200M_{Sd,tot}^2 - 140.230.253M_{Sd,tot} - 3,8943 \cdot 10^{11} = 0$$

$$M_{Sd,tot}^2 - 7.303,7 M_{Sd,tot} - 20.282.808 = 0$$

$$\text{A raiz positiva da equação de 2º grau é } M_{Sd,tot} = 9.450 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,A,y} = 0$$

e5) *Cálculo da armadura longitudinal*

Segundo o *Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*, ocorrem no pilar os dois momentos fletores totais: **dir. x** ( $M_{d,tot,x} = 7.000 \text{ kN.cm}$ ) e **dir. y** ( $M_{d,tot,y} = 10.602 \text{ kN.cm}$ ), sendo crítica a **direção y**, como já comentado, com a 2ª s.c. da seção intermediária (ver Figura 110 e Figura 111).

<sup>80</sup> As pequenas diferenças nos valores são devidas à simplificação nas casas decimais.

Para a **dir. y**, com  $v = 0,62$  e utilizando os ábacos de Venturini (1987) para *Flexão Reta*, faz-se o cálculo de  $\mu$  (Eq. 51 ou Eq. 52) e  $d'/h$ :

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{10602}{20 \cdot 1400 \frac{2,5}{1,4}} = 0,21 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,62 \frac{6,82}{20} = 0,21$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,54$$

$$\text{A armadura longitudinal é: } A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,54 \cdot 1400 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 31,03 \text{ cm}^2$$

Se aplicado o momento fletor resultante do cálculo segundo o *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*, a armadura resulta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{9.450}{20 \cdot 1400 \frac{2,5}{1,4}} = 0,19 \quad \rightarrow \quad \text{com } v = 0,62: \text{ Ábaco A-4: } \omega = 0,48$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,48 \cdot 1400 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 27,59 \text{ cm}^2$$

e6) Com as excentricidades acidentais (sem consideração do momento fletor mínimo)

A excentricidade acidental por **falta de retilineidade** (Figura 60) é calculada com a Eq. 78 e Eq. 79:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{4,6}} = 0,004663 \text{ rad}$$

com H suposto igual a  $\ell_e = 460 \text{ cm} = 4,6 \text{ m}$ . O valor de  $\theta_1$  deve ser comparado ao valor mínimo:

$$\theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \quad ; \quad \therefore \theta_1 = 0,004663 \text{ rad}$$

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \quad \rightarrow \quad e_{ax} = e_{ay} = 0,004663 \frac{460}{2} = 1,07 \text{ cm}$$

A Figura 112 mostra a situação de projeto e a situação de cálculo para a seção de extremidade do topo, submetida ao momento fletor  $M_{1d,A,x} = 7.000 \text{ kN.cm}$ , e onde a excentricidade acidental por falta de retilineidade é nula (ver Figura 60 e Figura 77). A Figura 113 mostra a seção intermediária C (ver Figura 78), onde a excentricidade de 1ª ordem é  $e_{1x,C} = 3,60 \text{ cm}$ .

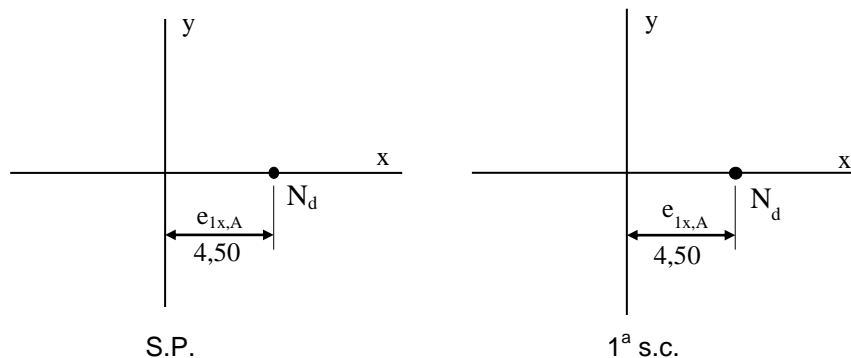


Figura 112 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção de extremidade do topo, para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental**.

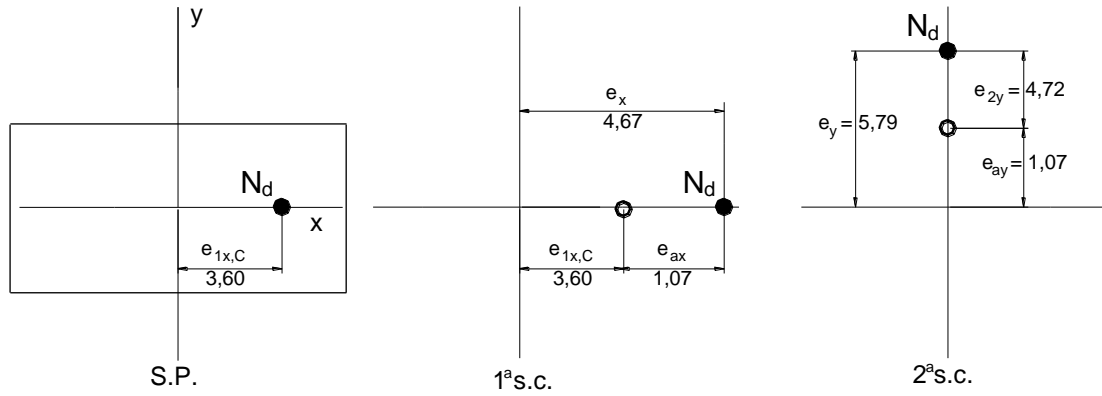


Figura 113 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade accidental**.

A maior armadura ocorre para a 2ª s.c. da seção intermediária (**dir. y**):

$$\mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,62 \frac{5,79}{20} = 0,18 \quad \rightarrow \quad \text{com } d'_y/h_y = 0,20: \text{ Ábaco A-4: } \omega = 0,46$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,46 \cdot 1400 \cdot \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 26,44 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,\min}$ )	31,03	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,\min}$ )	27,59	- 11
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_a$ )	26,44	- 15

### 13.2.3 Exemplo 3

Este exemplo é igual ao anterior, com a diferença do momento fletor que agora não é constante ao longo da altura do pilar, como mostrado na Figura 114. São conhecidos:

concreto C30 ;  $N_k = 500 \text{ kN}$   
 momentos fletores de 1ª ordem:  
 $M_{1d,A,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$   
 $M_{1d,B,x} = 2.000 \text{ kN.cm}$   
 seção 15 x 40 ( $A_c = 600 \text{ cm}^2$ )  
 comprimento equivalente:  $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$

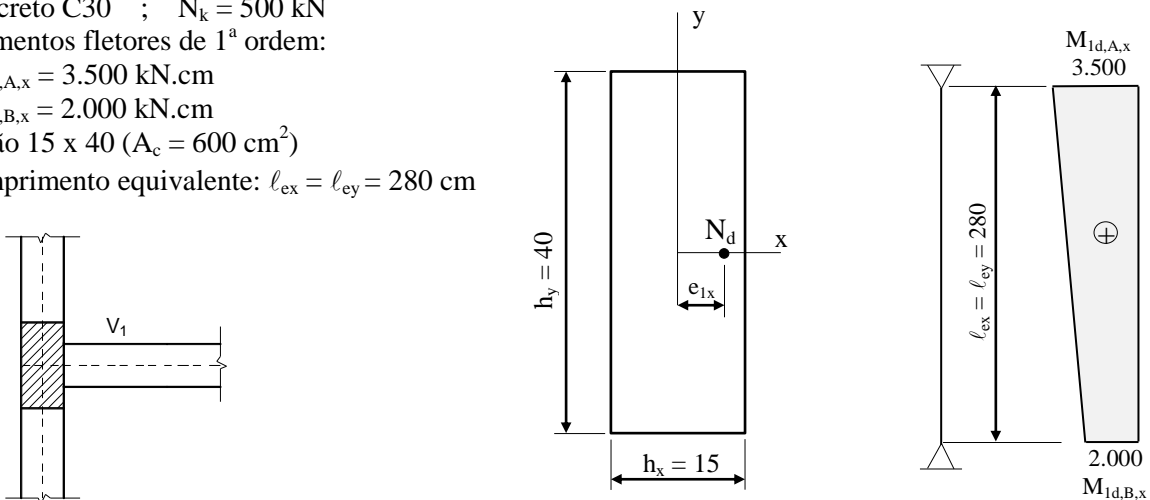


Figura 114 – Dimensões da seção transversal e momentos fletores de 1ª ordem na direção y.

**Resolução**

## a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é:  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,2 \cdot 1,4 \cdot 500 = 840 \text{ kN}$  ( $\gamma_n = 1,2$  na Tabela 6). Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores nos extremos do pilar, que o solicitam na direção x, em função de existir a viga (V 1) não contínua sobre o pilar nessa direção. Estes momentos fletores de 1ª ordem são valores de cálculo, já majorados pelos coeficientes de ponderação  $\gamma_f$  e  $\gamma_n$ . Como os momentos fletores não são iguais, as excentricidades iniciais de 1ª ordem na base e no topo são:

$$e_{1x,A} = \frac{M_{1d,x}}{N_d} = \frac{3500}{840} = 4,17 \text{ cm} \quad ; \quad e_{1x,B} = \frac{2000}{840} = 2,38 \text{ cm}$$

## b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{15} = 64,6$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 64,6 \leq 90 \rightarrow \text{ok! (pilar medianamente esbelto)}$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{40} = 24,2$$

## c) Momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\text{mín},x} = 840 (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 1.638 \text{ kN.cm} \quad ; \quad e_{1x,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 1,95 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\text{mín},y} = 840 (1,5 + 0,03 \cdot 40) = 2.268 \text{ kN.cm} \quad ; \quad e_{1y,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 40) = 2,70 \text{ cm}$$

## d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** como o maior momento fletor de 1ª ordem ( $M_{1d,A,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$ ) é maior que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\text{mín},x} = 1.638 \text{ kN.cm}$ ), os valores de  $\alpha_b$  e  $\lambda_{1,x}$  devem ser calculados (item 8.3):

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{2000}{3500} = 0,83 \geq 0,4 \quad \rightarrow \therefore \alpha_{b,x} = 0,83$$

E com a excentricidade de 1ª ordem  $e_{1x,A} = 4,17 \text{ cm}$ , relativa à  $h_x = 15 \text{ cm}$ :

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{4,17}{15}}{0,83} = 34,3 \geq 35 \quad \rightarrow \lambda_{1,x} = 35$$

**Dir. y:** na direção não ocorrem momentos e excentricidades de 1ª ordem, portanto  $e_{1y} = 0$  e  $\alpha_{b,y} = 1,0$ , e:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{40}}{1,0} = 25,0 \geq 35 \quad \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 64,6 > \lambda_{1,x} = 35 \rightarrow$  **são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x ( $e_2$  e  $M_2$ );

$\lambda_y = 24,2 < \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

A **direção x** é a crítica do pilar, porque tem os efeitos locais de 2ª ordem, além do momento fletor de 1ª ordem. A rigor, apenas a **direção x** pode ser analisada.

e) Cálculo dos momentos fletores totais e da armadura

e1) Com os diagramas de momentos fletores (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

Os efeitos locais de 2ª ordem na **direção x** devem ser determinados. A força normal adimensional (Eq. 77) é:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{840}{600 \frac{3,0}{1,4}} = 0,65$$

Curvatura na **direção x** (sujeita aos momentos fletores de 2ª ordem - Eq. 76):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{15(0,65+0,5)} = 2,8986 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{15} = 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \quad \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem é (Eq. 74):

$$e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10r} = \frac{280^2}{10} 2,8986 \cdot 10^{-4} = 2,27 \text{ cm}$$

O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75):  $M_{2d,x} = N_d \frac{\ell_e^2}{10r} = N_d e_2 = 840 \cdot 2,27 = 1.907 \text{ kN.cm}$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 115. A **direção x** é a que apresenta a maior esbeltez, e onde ocorre o momento fletor de 2ª ordem, e por isso conduz à armadura final do pilar. A **direção y** é secundária neste caso. Na **direção x**, o momento fletor total (máximo) pode ocorrer na seção de extremidade mais solicitada (para o maior momento fletor de 1ª ordem,  $M_A$ ) ou na seção intermediária C.

**Dir. x:**

$$\text{Seção de extremidade (A): } M_{d,tot,x} \geq \begin{cases} M_{1d,A,x} = 3.500 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,x} = 1.638 \text{ kN.cm} \end{cases} \quad \rightarrow \therefore M_{d,tot,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$$

Para a seção intermediária C, deve ser determinado o momento fletor de 1ª ordem  $M_{1d,C,x}$ :

$$M_{1d,C,x} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A,x} + 0,4 M_{1d,B,x} \\ 0,4 M_{1d,A,x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad M_{1d,C,x} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot 3500 + 0,4 \cdot (2000) = 2.900 \text{ kN.cm} \\ 0,4 \cdot 3500 = 1.400 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$$\therefore M_{1d,C,x} = 2.900 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 1.638 \text{ kN.cm}$$

Neste caso, o momento fletor na seção intermediária C ( $M_{1d,C,x}$ ) superou o momento fletor mínimo, e o momento fletor total é:

$$M_{d,tot,x} = M_{1d,C,x} + M_{2d,x} = 2.900 + 1.907 = 4.807 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,tot,y} = M_{1d,mín,y} = 2.268 \text{ kN.cm}$$

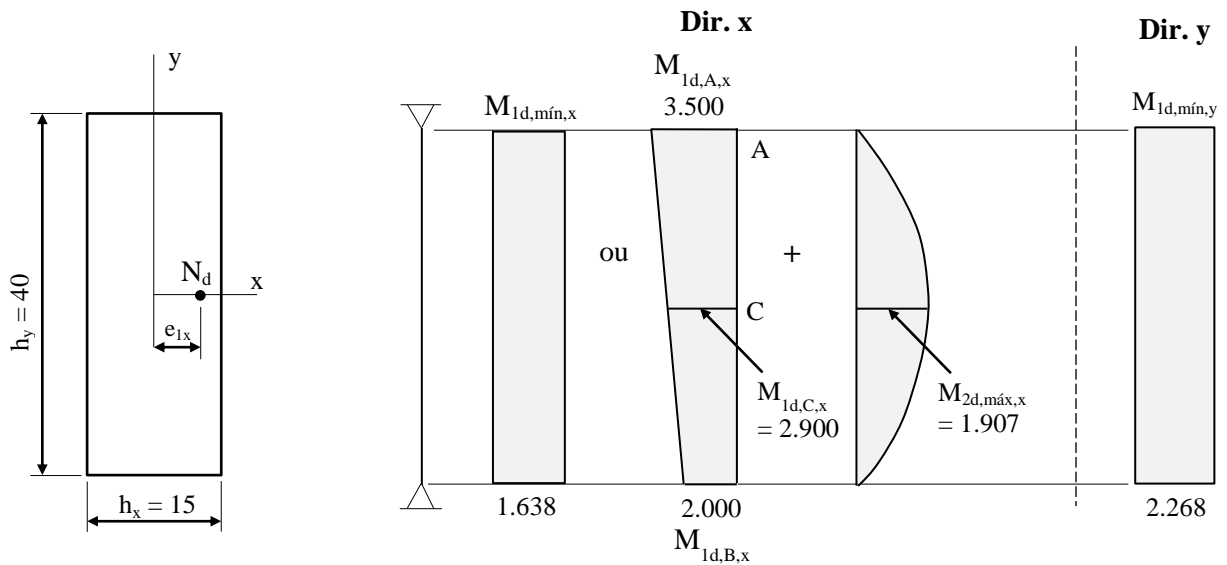


Figura 115 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

e2) Com os diagramas das excentricidades (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

As situações de projeto e de cálculo, para as seções de extremidade e intermediária, estão mostradas na Figura 116 e na Figura 117. Como as seções de extremidade de topo e base do pilar estão submetidas a diferentes momentos fletores de 1ª ordem, deve ser analisada a seção de extremidade onde ocorre o maior momento fletor, a de topo neste caso (Figura 116). Entre  $e_{1x,A}$  e  $e_{1x,min}$  deve ser escolhido o maior valor (ver Figura 69).

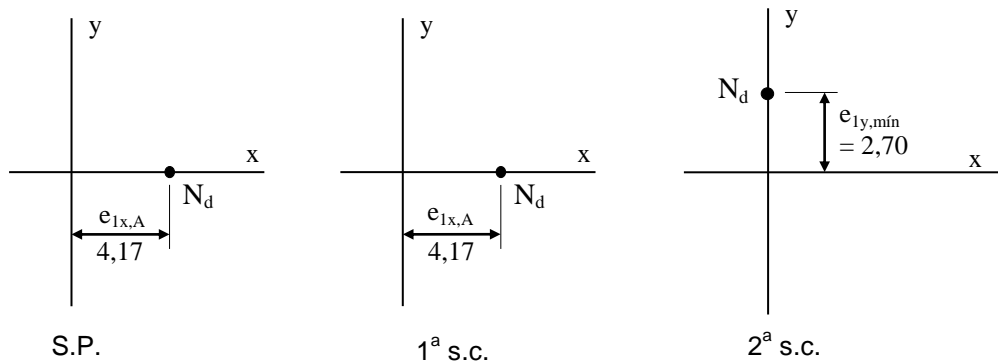


Figura 116 – Situações de projeto e de cálculo da seção de extremidade (de topo).

A excentricidade inicial ou de 1ª ordem na seção intermediária C é calculada com a Eq. 95, em função das excentricidades de 1ª ordem inicial ( $e_{1x}$ ):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 4,17 + 0,4 \cdot (2,38) = 3,45 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 4,27 = 1,71 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 3,45 \text{ cm} \geq e_{1x,min} = 1,95 \text{ cm} \rightarrow \text{ok! (ver Figura 70)}$$

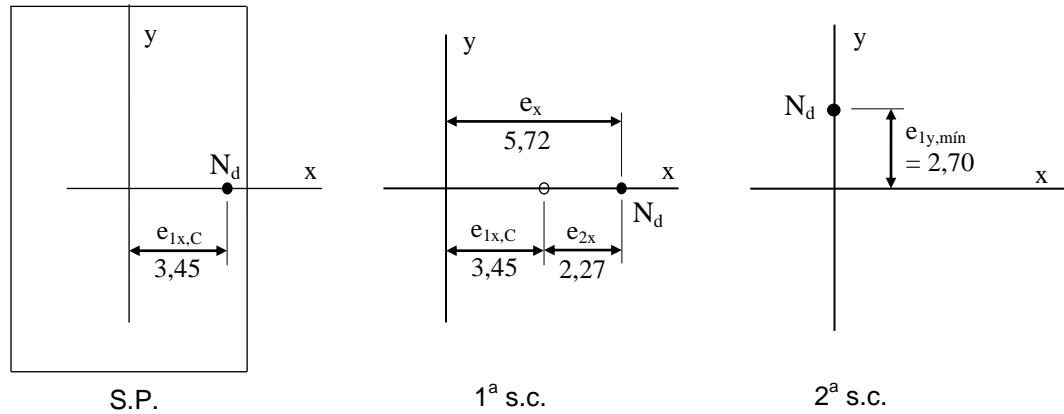


Figura 117 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária C.

Os momentos fletores totais (máximos) são:

$$\text{Dir. x: } M_{d,\text{tot},x} = N_d \cdot e_x = 840 \cdot 5,72 = 4.805 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,\text{tot},y} = N_d \cdot e_{1y,\text{mín}} = 840 \cdot 2,70 = 2.268 \text{ kN.cm}$$

e3) Com a Eq. 96 (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

$$M_{d,\text{tot}} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10r} \geq M_{1d,A}, \quad \text{com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,\text{mín}}$$

**Dir. x:** com  $\alpha_{b,x} = 0,83$  tem-se  $\alpha_b M_{1d,A} = 0,83 \cdot 3.500 = 2.905 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\text{mín},x} = 1.638 \text{ kN.cm}$ , e:

$$M_{d,\text{tot},x} = 2.905 + 840 \frac{280^2}{10} 2,8986 \cdot 10^{-4} = 4.814 \text{ kN.cm} (\cong 4.805)^{81} \geq M_{1d,A,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:** não existe momento fletor de 1ª ordem, portanto:  $M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\text{mín},y} = 2.268 \text{ kN.cm}$

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*)

$$19200M_{\text{Sd,tot}}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{\text{Sd,tot}} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Para a **direção x** tem-se  $h = h_x = 15 \text{ cm}$ ,  $\lambda_x = 64,6$ ,  $\alpha_{b,x} = 0,83$  e fazendo  $M_{1d,A,x} = 3.500 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\text{mín},x} = 1.638 \text{ kN.cm}$ , tem-se:

$$19200M_{\text{Sd,tot}}^2 + (3840 \cdot 15 \cdot 840 - 64,6^2 \cdot 15 \cdot 840 - 19200 \cdot 0,83 \cdot 3.500) M_{\text{Sd,tot}} - 3840 \cdot 0,83 \cdot 15 \cdot 840 \cdot 3.500 = 0$$

$$19200M_{\text{Sd,tot}}^2 - 59.973.816 M_{\text{Sd,tot}} - 1,405555 \cdot 10^{11} = 0$$

$$M_{\text{Sd,tot}}^2 - 3.123,6 M_{\text{Sd,tot}} - 7.320.600 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{\text{Sd,tot}} = 4.686 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,A} = 3.500 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$

e5) *Cálculo da armadura longitudinal*

Segundo o *Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*, ocorrem no pilar os dois momentos fletores máximos: **dir. x** ( $M_{d,\text{tot},x} = 4.805 \text{ kN.cm}$ ), da 1ª s.c. da seção intermediária, onde ocorre a maior excentricidade na direção de menor rigidez do pilar (x), Figura 117.

Com  $\nu = 0,65$  e os ábacos de Venturini (1987) para *Flexão Reta*, faz-se o cálculo de  $\mu$  (Eq. 51 ou Eq. 52) e  $d'/h$  para a **dir. x**:

<sup>81</sup> A diferença deve-se às simplificações nas casas decimais dos valores numéricos.

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4805}{15 \cdot 600 \frac{3,0}{1,4}} = 0,25 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,65 \frac{5,72}{15} = 0,25$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{15} = 0,27 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-5: } \omega = 0,84$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,84 \cdot 600 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 24,83 \text{ cm}^2$$

Se aplicado o momento fletor resultante do cálculo segundo o *Método do pilar-padrão com rigidez  $\mathcal{K}$  aproximada*, a armadura resulta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4686}{15 \cdot 600 \frac{3,0}{1,4}} = 0,24 \quad \rightarrow \quad \text{com } d'_x/h_x = 0,27 \text{ e } v = 0,65: \text{ Ábaco A-4: } \omega = 0,81$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,81 \cdot 600 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 23,94 \text{ cm}^2$$

e6) Com as excentricidades acidentais (sem consideração do momento fletor mínimo)

A excentricidade por falta de retitude (Figura 60) é determinada com a Eq. 78 e Eq. 79:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{2,8}} = 0,00598 \text{ rad} \quad , \text{ com } H = 2,8 \text{ m} = \text{altura do lance do pilar.}$$

$$\theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \therefore \theta_1 = 0,00598 \text{ rad}$$

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \quad \rightarrow \quad e_{ax} = e_{ay} = 0,00598 \frac{280}{2} = 0,84 \text{ cm}$$

As situações de projeto e de cálculo das seções de extremidade e intermediária estão na Figura 118 e Figura 119 (ver Figura 77 e Figura 78).

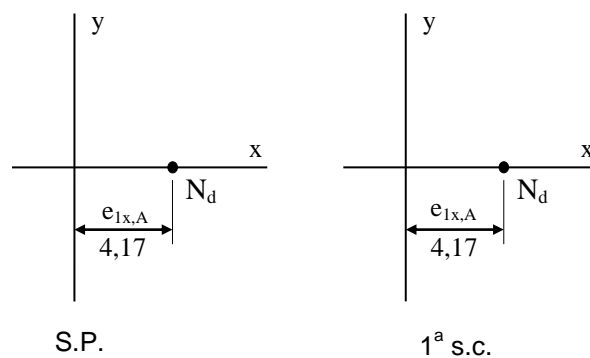


Figura 118 – Situações de projeto e de cálculo da seção de extremidade (topo), para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental** por falta de retitude.

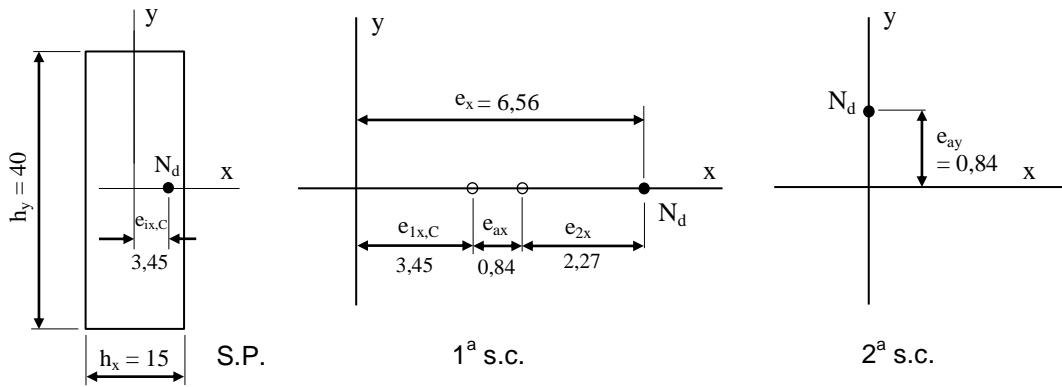


Figura 119 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental** por falta de retilinearidade.

A armadura resulta:

$$\mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,65 \frac{6,56}{15} = 0,28 \quad \rightarrow \text{com } d'_x/h_x = 0,27 \text{ e } v = 0,65: \text{ Ábaco A-4: } \omega = 1,02$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{1,02 \cdot 600 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 30,15 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,\min}$ )	24,83	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,\min}$ )	23,94	- 3,6
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_a$ )	30,15	+ 21

### 13.2.4 Exemplo 4

Para o pilar mostrado na Figura 120, calcular a armadura longitudinal necessária. São conhecidos:

concreto C30

$N_k = 500$  kN

$M_{1d,A,y} = M_{1d,B,y} = 3.500$  kN.cm

seção transversal:

15 x 40 ( $A_c = 600$  cm<sup>2</sup>)

comprimento equivalente:

$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280$  cm

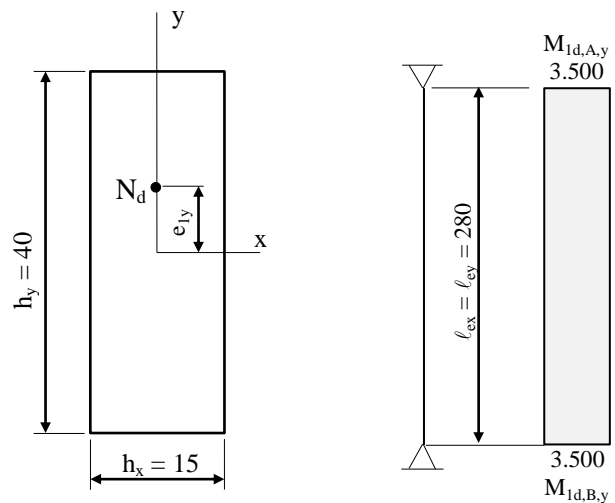
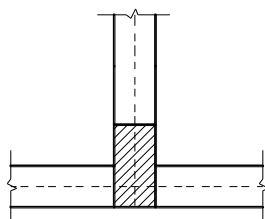


Figura 120 – Dimensões da seção transversal e momentos fletores de 1ª ordem na direção y.

### Resolução

## a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é:  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,2 \cdot 1,4 \cdot 500 = 840 \text{ kN}$  ( $\gamma_n = 1,2$  na Tabela 6). Atuam também momentos fletores ao longo da altura do pilar, na **direção y**, já majorados pelos coeficientes de ponderação  $\gamma_f$  e  $\gamma_n$ . Como o momento fletor é constante, a excentricidade inicial de 1ª ordem é:

$$e_{1y,A} = e_{1y,B} = \frac{M_{1d,y}}{N_d} = \frac{3500}{840} = 4,17 \text{ cm}$$

## b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{15} = 64,6$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 64,6 \leq 90 \rightarrow \text{ok! (pilar medianamente esbelto)}$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{40} = 24,2$$

## c) Momento fletor mínimo (Eq. 91)

$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$ , com **h** em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção é:

**Dir. x:**  $M_{1d,\text{mín},x} = 840 (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 1.638 \text{ kN.cm}$  ;  $e_{1x,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 1,95 \text{ cm}$

**Dir. y:**  $M_{1d,\text{mín},y} = 840 (1,5 + 0,03 \cdot 40) = 2.268 \text{ kN.cm}$  ;  $e_{1y,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 40) = 2,70 \text{ cm}$

## d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** na direção não ocorrem momentos e excentricidades de 1ª ordem, portanto  $e_{1x} = 0$  e  $\alpha_{b,x} = 1,0$ , e:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{15}}{1,0} = 25,0 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

**Dir. y:** o momento fletor de 1ª ordem ( $M_{1d,A,y} = 3.500 \text{ kN.cm}$ ) é maior que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\text{mín},y} = 2.268 \text{ kN.cm}$ ), por isso  $\alpha_b$  deve ser calculado. No entanto, como o momento fletor é constante, o valor de  $\alpha_b$  resulta igual a 1,0 (ver item 8.3):

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{3500}{3500} = 1,0 \geq 0,4 \rightarrow \therefore \alpha_{b,y} = 1,0$$

A excentricidade de 1ª ordem é  $e_{1y,A} = e_{1y,B} = 4,17 \text{ cm}$  e:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{4,17}{40}}{1,0} = 26,3 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 64,6 > \lambda_{1,x} = 35 \rightarrow$  **são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x ( $e_2$  e  $M_2$ );

$\lambda_y = 24,2 < \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

Embora a existência do momento fletor de 1ª ordem na **direção y**, a direção x é a crítica, devido aos efeitos locais de 2ª ordem que devem ser considerados.

e) Cálculo dos momentos fletores totais e da armadura

e1) Com os diagramas de momentos fletores (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

Os efeitos locais de 2ª ordem na **direção x** são determinados com a força normal adimensional (Eq. 77):

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{840}{600 \frac{3,0}{1,4}} = 0,65$$

Curvatura na **direção x** (Eq. 76):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{15(0,65+0,5)} = 2,8986 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{15} = 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem é (Eq. 74):

$$e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10r} = \frac{280^2}{10} 2,8986 \cdot 10^{-4} = 2,27 \text{ cm}$$

O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75):  $M_{2d,x} = N_d \frac{\ell_e^2}{10r} = N_d e_2 = 840 \cdot 2,27 = 1.907 \text{ kN.cm}$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 121. A **direção x** é a que apresenta a maior esbelteza, onde ocorre o momento fletor de 2ª ordem, e por isso deve conduzir à armadura final do pilar. A **direção y** é secundária, mas deve ser checada. Na **direção x**, o momento fletor total (máximo) ocorre na seção intermediária, onde atua o momento fletor  $M_2$  máximo.

**Dir. x:**  $M_{d,tot,x} = M_{1d,mín,x} + M_{2d,x} = 1.638 + 1.907 = 3.545 \text{ kN.cm}$

**Dir. y:**  $M_{d,tot,y} = M_{1d,A,y} = 3.500 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 2.268 \text{ kN.cm}$

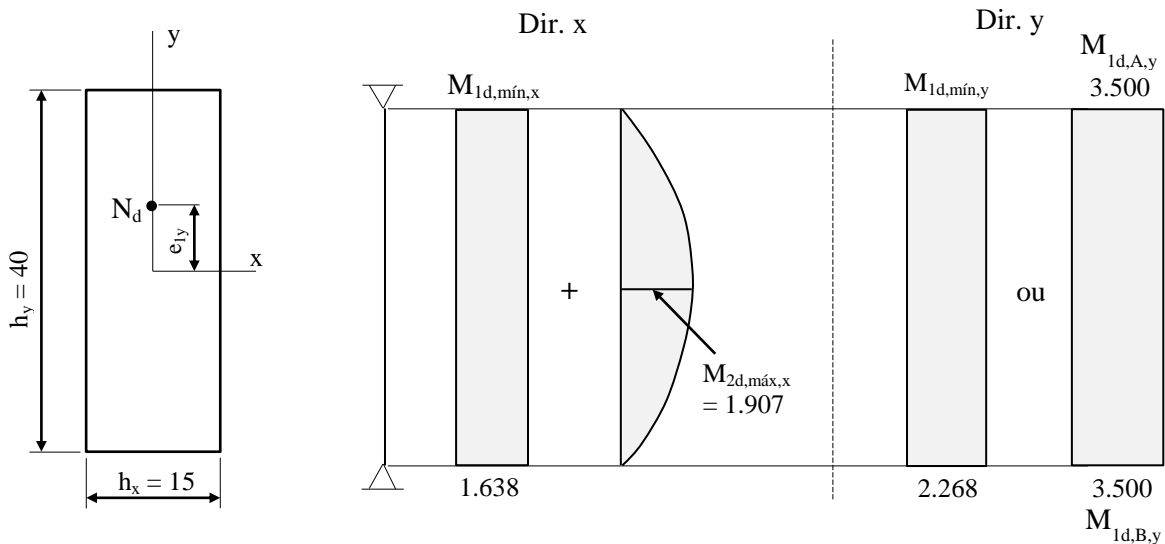


Figura 121 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

e2) Com os diagramas de excentricidades (**Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**)

As situações de projeto e de cálculo, para as seções de extremidade e intermediária, estão mostradas na Figura 122 e na Figura 123, e devem ser comparadas com a Figura 69 e Figura 70. Como as seções de extremidade estão submetidas ao mesmo momento fletor de 1ª ordem, as seções de topo e base são iguais.

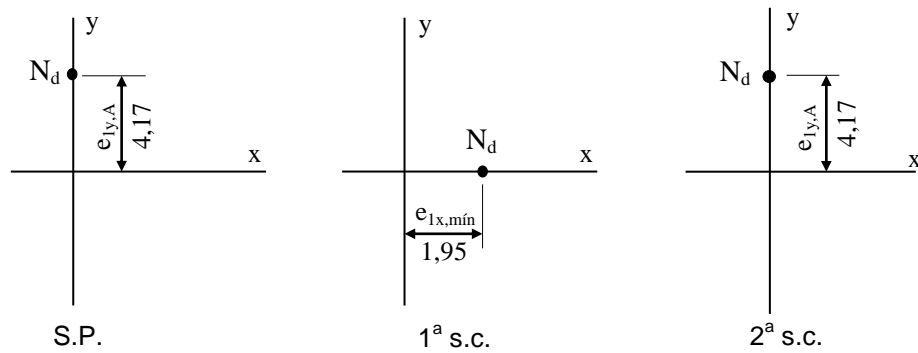


Figura 122 – Situações de projeto e de cálculo da seção de extremidade (topo = base).

Na seção intermediária deve-se analisar: na **direção y**:  $e_{ly,A} = 4,17 \text{ cm} \geq e_{ly,mín} = 2,70 \text{ cm}$ , e na **direção x** atuam as excentricidades correspondentes ao momento fletor mínimo e ao momento fletor de 2ª ordem.

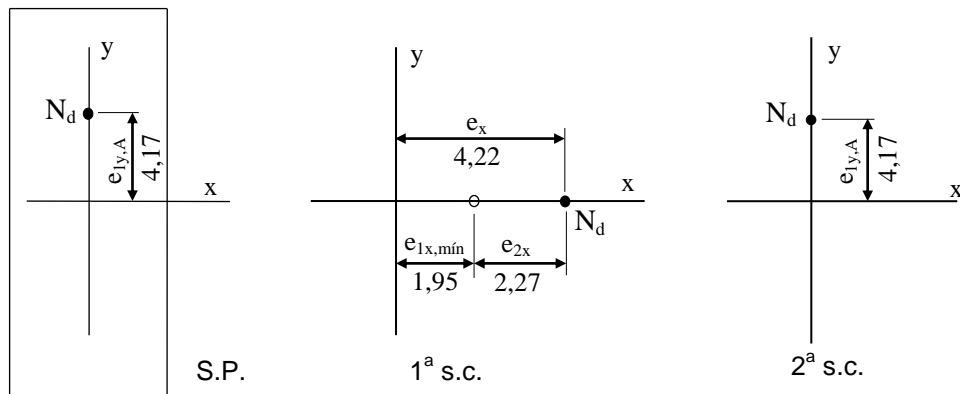


Figura 123 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária C.

Os momentos fletores totais (máximos) são:

$$\text{Dir. x: } M_{d,tot,x} = N_d \cdot e_x = 840 \cdot 4,22 = 3.545 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_{ly,A} = 840 \cdot 4,17 = 3.503 \text{ kN.cm} \cong 3.500 \text{ kN.cm}$$

e3) Com a Eq. 96 (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$$

**Dir. x:** tem-se  $e_{2x} = 2,27 \text{ cm}$ ,  $\alpha_{b,x} = 1,0$  e  $M_{1d,A} = 0$ , portanto,  $\alpha_b M_{1d,A} = M_{1d,mín,x} = 1.638 \text{ kN.cm}$ , e:

$$M_{d,tot,x} = 1.638 + 840 \cdot 2,27 = 3.545 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:**  $e_{2y} = 0$ ,  $\alpha_{b,y} = 1,0$  e existe o momento fletor de 1ª ordem,  $M_{1d,A,y} = 3.500 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 2.268 \text{ kN.cm}$ , portanto:  $M_{d,tot,y} = M_{1d,A,y} = 3.500 \text{ kN.cm}$

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*)

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,tot} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Para a **direção x** tem-se  $h = h_x = 15 \text{ cm}$ ,  $\lambda_x = 64,6$ ,  $\alpha_{b,x} = 1,0$  e fazendo  $M_{1d,A} = M_{1d,mín,x} = 1.638 \text{ kN.cm}$  tem-se:

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840.15.840 - 64,6^2 \cdot 15.840 - 19200.1,0.1638) M_{Sd,tot} - 3840.1,0.15.840.1638 = 0$$

$$19200M_{Sd,tot}^2 - 35.647.416M_{Sd,tot} - 7,9253.10^{10} = 0$$

$$M_{Sd,tot}^2 - 1.856,6 M_{Sd,tot} - 4.127.760 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{Sd,tot} = 3.162 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 1.638 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$

### e5) Cálculo da armadura longitudinal

Segundo o *Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*, ocorrem no pilar os dois momentos fletores máximos: **dir. x** ( $M_{d,tot,x} = 3.545 \text{ kN.cm}$ ), da 1ª s.c. da seção intermediária, onde ocorre a maior excentricidade na direção de menor rigidez do pilar (x), Figura 123. Com  $\nu = 0,65$  e os ábacos de Venturini (1987) para *Flexão Reta*, faz-se o cálculo de  $\mu$  (Eq. 51 ou Eq. 52) e  $d'/h$  para a **dir. x**:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3545}{15.600 \frac{3,0}{1,4}} = 0,18 \quad \text{ou} \quad \mu = \nu \frac{e_x}{h_x} = 0,65 \frac{4,22}{15} = 0,18$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{15} = 0,27 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-5: } \omega = 0,53$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,53 \cdot 600 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 15,67 \text{ cm}^2$$

Se aplicado o momento fletor resultante do cálculo segundo o *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*, a armadura resulta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3162}{15.600 \frac{3,0}{1,4}} = 0,16 \quad \rightarrow \quad \text{com } d'_x/h_x = 0,27 \text{ e } \nu = 0,65: \text{ Ábaco A-4: } \omega = 0,42$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,42 \cdot 600 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 12,41 \text{ cm}^2$$

### e6) Com as excentricidades acidentais (sem consideração do momento fletor mínimo)

A excentricidade por falta de retilinearidade (Figura 60) é determinada com a Eq. 78 e Eq. 79:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{2,8}} = 0,00598 \text{ rad} \quad , \text{ com } H = 2,8 \text{ m} = \text{altura do lance do pilar.}$$

$$\theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \therefore \theta_1 = 0,00598 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} = 0,00598 \frac{280}{2} = 0,84 \text{ cm}$$

As situações de projeto e de cálculo das seções de extremidade e intermediária estão na Figura 124 e Figura 125 (ver Figura 77 e Figura 78).

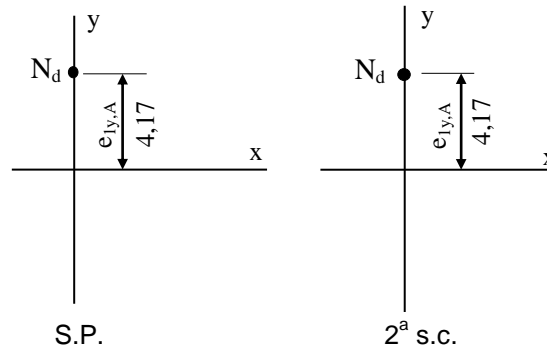


Figura 124 – Situações de projeto e de cálculo da seção de extremidade (topo = base), para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental** por falta de retilinearidade.

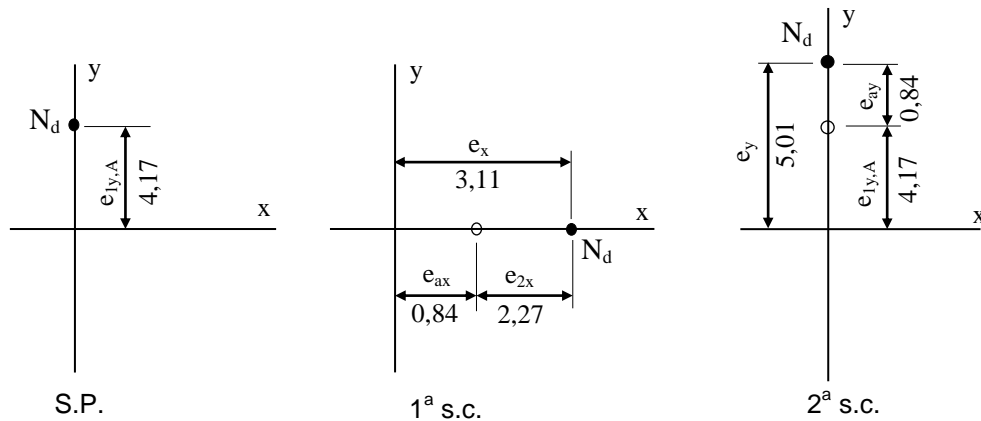


Figura 125 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental** por falta de retilinearidade.

A armadura resulta da 1ª s.c. da seção intermediária:

$$\mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,65 \frac{3,11}{15} = 0,13 \quad \rightarrow \quad \text{com } d'_x/h_x = 0,27 \text{ e } v = 0,65: \text{ Ábaco A-4: } \omega = 0,29$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,29 \cdot 600 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 8,57 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,\min}$ )	15,67	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,\min}$ )	12,41	- 21
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_a$ )	8,57	- 55

### 13.3 Pilares de Canto

Os exemplos numéricos a seguir são de pilares de **canto**, apoiados na base e no topo, de nós fixos (pilar contraventado) e sem forças transversais (horizontais) atuantes. Os cálculos serão feitos mostrando-se os diagramas de momentos fletores solicitantes e também as excentricidades, como apresentado no item 10.1.2.1, considerando-se o **momento fletor mínimo** ou a **excentricidade acidental**.

Os seguintes dados são comuns em todos os exemplos: coeficientes de ponderação:  $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ ; aço CA-50 ( $f_{yd} = 50/1,15 \cong 43,5$  kN/cm<sup>2</sup>).

### 13.3.1 Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura 126, sendo conhecidos:

concreto C25 ;  $N_k = 850 \text{ kN}$

$M_{1k,A,x} = -M_{1k,B,x} = 2.041 \text{ kN.cm}$

$M_{1k,A,y} = -M_{1k,B,y} = 1.360,5 \text{ kN.cm}$

seção transversal 18 x 50:

$A_c = 900 \text{ cm}^2$

comprimento equivalente:

$l_{ex} = l_{ey} = 350 \text{ cm}$

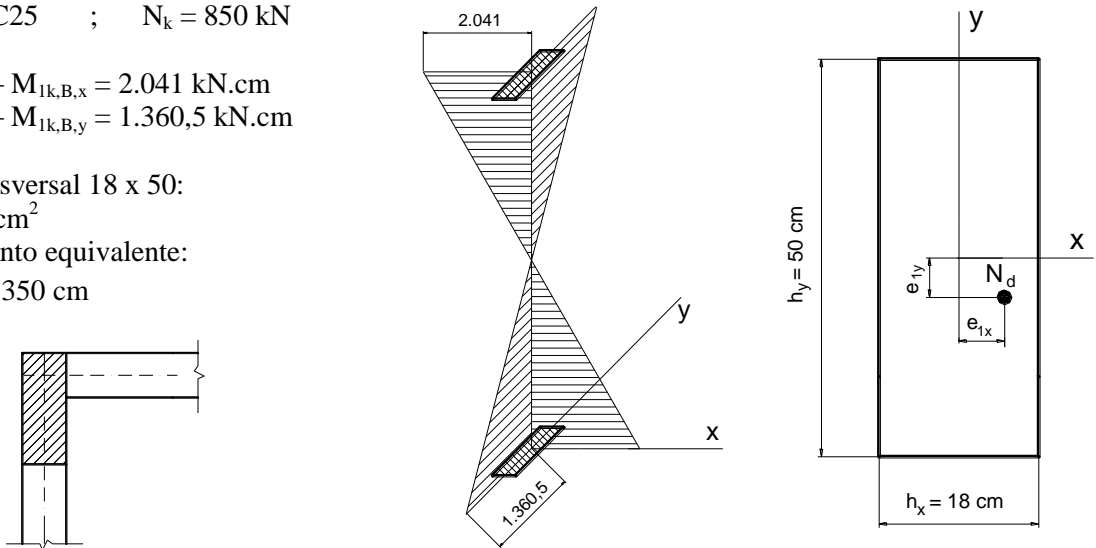


Figura 126 – Arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma, dimensões da seção transversal e posição do ponto de aplicação da força normal  $N_d$ , e momentos fletores solicitantes de 1ª ordem.

#### Resolução

##### a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é (Eq. 112):  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,05 \cdot 1,4 \cdot 850 = 1.250 \text{ kN}$  ( $\gamma_n = 1,05$  na Tabela 6). Atuam também momentos fletores de 1ª ordem na base e no topo do pilar,  $M_{1k,A,x} = -M_{1k,B,x} = 2.041 \text{ kN.cm}$  na **direção x**, e  $M_{1k,A,y} = -M_{1k,B,y} = 1.360,5 \text{ kN.cm}$  na **direção y** (Figura 126), em função da existência de duas vigas não contínuas sobre o pilar, nas direções x e y. Estes momentos fletores também devem ser majorados com os coeficientes  $\gamma_n$  e  $\gamma_f$  para serem transformados em valores de cálculo:

$$M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 1,05 \cdot 1,4 \cdot 2.041 = 3.000 \text{ kN.cm}$$

$$M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1,05 \cdot 1,4 \cdot 1.360,5 = 2.000 \text{ kN.cm}$$

As excentricidades de 1ª ordem, na base e no topo do pilar, são (Figura 127):

$$\text{Dir. x: } e_{1x,A} = -e_{1x,B} = \frac{M_{1d,x}}{N_d} = \frac{3.000}{1.250} = 2,40 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } e_{1y,A} = -e_{1y,B} = \frac{M_{1d,y}}{N_d} = \frac{2.000}{1.250} = 1,60 \text{ cm}$$

##### b) Índice de esbeltez (Eq. 61)

$$\lambda_x = \frac{3,46 l_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 350}{18} = 67,3$$

pilar medianamente esbelto na **dir. x**

$$\lambda_y = \frac{3,46 l_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 350}{50} = 24,2$$

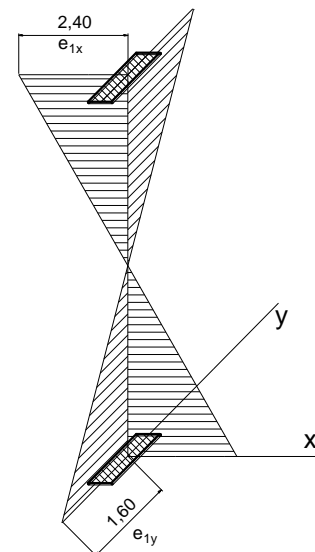


Figura 127 – Excentricidades de 1ª ordem (valores de cálculo - cm) nas direções x e y.

pilar curto na **dir. y**, e  $\lambda_{\text{máx}} = 67,3 \leq 90 \rightarrow \text{ok!}$

c) *Momento fletor mínimo (Eq. 91)*

$M_{\text{Id,mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$ , com **h** em cm. O momento fletor mínimo e a excentricidade correspondente, em cada direção, são:

$$\text{Dir. x: } M_{\text{Id,mín,x}} = 1.250 (1,5 + 0,03 \cdot 18) = 2.550 \text{ kN.cm} ; e_{1x,\text{mín}} = \frac{2.550}{1.250} = 2,04 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{\text{Id,mín,y}} = 1.250 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.750 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\text{mín}} = \frac{3.750}{1.250} = 3,00 \text{ cm}$$

d) *Esbeltez limite (Eq. 81)*

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** o momento fletor de 1ª ordem<sup>82</sup> é  $M_{\text{Id,A,x}} = 3.000 \text{ kN.cm}$ , maior que o momento fletor mínimo ( $M_{\text{Id,mín,x}} = 2.550 \text{ kN.cm}$ ), o que leva ao cálculo de  $\alpha_b$  (ver item 8.3):

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-3.000)}{3.000} = 0,2 \geq 0,4 \rightarrow \therefore \alpha_{b,x} = 0,4$$

Com a excentricidade de 1ª ordem  $e_{1x,A} = 2,40 \text{ cm}$  e  $h = h_x = 18 \text{ cm}$ :

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{2,40}{18}}{0,4} = 66,7 \geq 35 \rightarrow \text{ok!}$$

**Dir. y:** o maior momento fletor de 1ª ordem nesta direção é  $M_{\text{Id,A,y}} = 2.000 \text{ kN.cm}$ , menor que o momento fletor mínimo ( $M_{\text{Id,mín,y}} = 3.750 \text{ kN.cm}$ ), o que leva a  $\alpha_{b,y} = 1,0$ , e com a excentricidade de 1ª ordem correspondente ( $e_{1y,A} = 1,60 \text{ cm}$ ) e  $h = h_y = 50 \text{ cm}$ :

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,60}{50}}{1,0} = 25,4 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 67,3 > \lambda_{1,x} = 66,7 \rightarrow$  **são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 24,2 < \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

Na **direção x** ocorrem os efeitos locais de 2ª ordem, bem como o maior momento fletor de 1ª ordem, portanto, a **direção x** é a crítica. No entanto, como o pilar é de canto, onde a situação de projeto é de *Flexão Composta Oblíqua*, os momentos fletores na **direção y** também necessitam ser considerados para o cálculo da armadura final do pilar. O maior momento fletor solicitante deve ocorrer na seção intermediária, devido à existência da excentricidade  $e_{2x}$ , mas para fins didáticos as seções de extremidade também serão verificadas.

e) *Cálculo do momento fletor total e da armadura*

e1) *Com os diagramas de momentos fletores (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)*

Os efeitos locais de 2ª ordem devem ser calculados para a **direção x**. A força normal adimensional é (Eq. 77):

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1250}{900 \frac{2,5}{1,4}} = 0,78$$

<sup>82</sup> Deve ser considerado o maior momento fletor ( $M_A$ ), quando os valores no topo e na base forem diferentes.

Curvatura na **direção x** (Eq. 76):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{18(0,78+0,5)} = 2,1701 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h} = \frac{0,005}{18} = 2,7778 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem é (Eq. 74):  $e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10r} = \frac{350^2}{10} 2,1701 \cdot 10^{-4} = 2,66 \text{ cm}$

O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75):

$$M_{2d,x} = N_d \frac{\ell_e^2}{10r} = N_d e_{2x} = 1250 \cdot 2,66 = 3.325 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 128. Deve ser determinado o momento fletor total (máximo) em cada direção (ver Figura 71), nas seções de extremidade e na seção intermediária C, sendo que as seções de extremidade são iguais neste caso.

**Seção de extremidade (topo e base):**

$$\text{Dir. x: } M_{d,tot,x} \geq \begin{cases} M_{1d,A,x} = 3.000 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,x} = 2.550 \text{ kN.cm} \end{cases} \quad \text{Dir. y: } M_{d,tot,y} \geq \begin{cases} M_{1d,A,y} = 2.000 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,y} = 3.750 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

Portanto:  $M_{d,tot,x} = 3.000 \text{ kN.cm}$  e  $M_{d,tot,y} = 3.750 \text{ kN.cm}$ .

**Seção intermediária (C):**

**Dir. x:** nesta direção ocorre  $M_{2d,x}$ , e deve ser determinado o momento fletor de 1ª ordem  $M_{1d,C,x}$  (Eq. 93):

$$M_{1d,C,x} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A,x} + 0,4 M_{1d,B,x} \\ 0,4 M_{1d,A,x} \end{cases} \rightarrow M_{1d,C,x} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot 3000 + 0,4 \cdot (-3000) = 600 \text{ kN.cm} \\ 0,4 \cdot 3000 = 1.200 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$\therefore M_{1d,C,x} = 1.200 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 2.550 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{não ok!}$

Neste caso, deve ser considerado o momento fletor mínimo, e:

$$M_{d,tot,x} = M_{1d,mín,x} + M_{2d,x} = 2.550 + 3.325 = 5.875 \text{ kN.cm} \quad (\text{ver Figura 128})$$

**Dir. y:** como se observa na Figura 128, fica claro que o momento fletor de 1ª ordem  $M_{1d,C,y}$  é menor que o momento fletor mínimo, mas fazendo o cálculo:

$$M_{1d,C,y} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A,y} + 0,4 M_{1d,B,y} \\ 0,4 M_{1d,A,y} \end{cases} \rightarrow M_{1d,C,y} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot 2000 + 0,4 \cdot (-2000) = 400 \text{ kN.cm} \\ 0,4 \cdot 2000 = 800 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$\therefore M_{1d,C,y} = 800 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 3.750 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{não ok!}$

Portanto,  $M_{d,tot,y} = M_{1d,mín,y} = 3.750 \text{ kN.cm}$

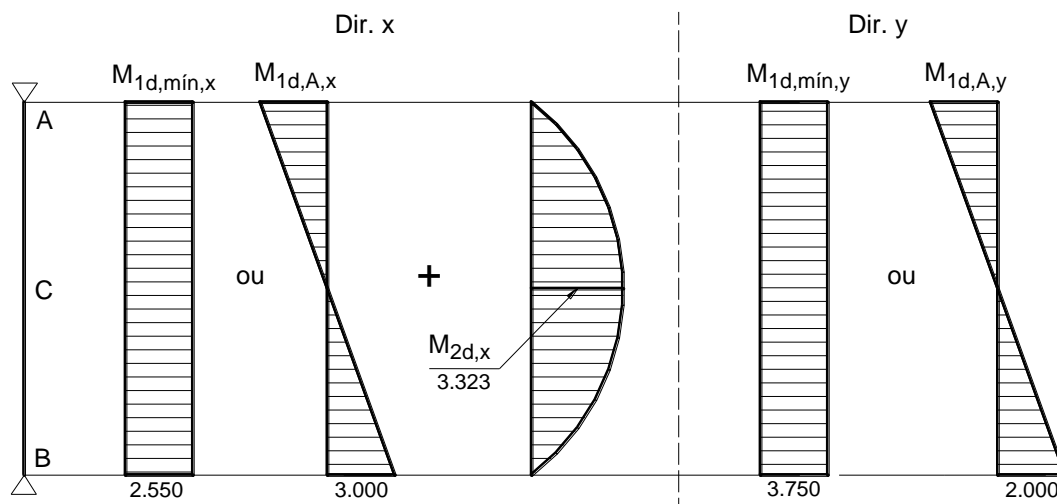


Figura 128 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções  $x$  e  $y$ .

e2) Com os diagramas das excentricidades (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

As situações de projeto e de cálculo, para as seções de extremidade e intermediária, estão mostradas na Figura 129 e Figura 130. Como as seções de extremidade de topo e base do pilar estão submetidas ao mesmo valor de momento fletor de 1ª ordem, as seções são iguais.<sup>83</sup> Quando os momentos fletores são diferentes, deve-se buscar a extremidade que conduz à maior armadura para o pilar. Conforme a excentricidades mostradas na Figura 72, a Figura 129 mostra a situação de cálculo para as seções de extremidade. As excentricidades de 1ª ordem  $e_1$  devem ser comparadas às excentricidades de 1ª ordem mínimas, sendo assumidas as maiores, para cada direção.

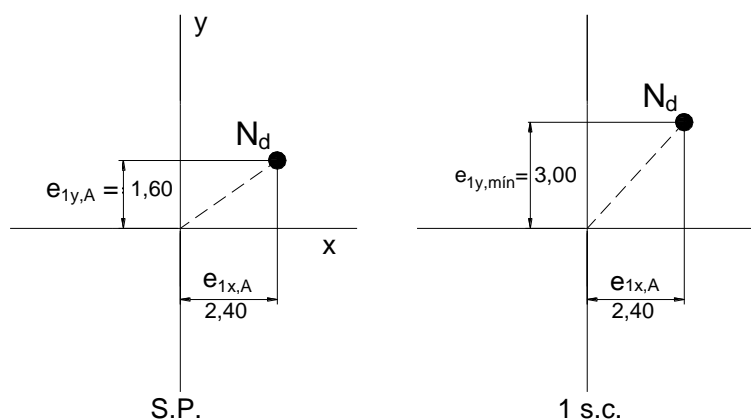


Figura 129 – Situações de projeto e de cálculo das seções de extremidade (topo e base).

A excentricidade inicial de 1ª ordem na seção intermediária  $C$  é calculada com a Eq. 95, em função da excentricidade de 1ª ordem ( $e_1$ ) nas extremidades do pilar, em cada direção:

**Dir.  $x$ :**

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 2,40 + 0,4 \cdot (-2,40) = 0,48 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 2,40 = 0,96 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 0,96 \text{ cm}$$

**Dir.  $y$ :**

<sup>83</sup> Os momentos fletores nas extremidades têm sinais diferentes, ou seja, tracionam bordas opostas na base e no topo, porém, a escolha de armadura bilateral simétrica é uma solução que proporciona resistência ao pilar a ambos os momentos fletores.

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1y,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1y,A} + 0,4 e_{1y,B} = 0,6 \cdot 1,60 + 0,4 \cdot (-1,60) = 0,32 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1y,A} = 0,4 \cdot 1,60 = 0,64 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1y,C} = 0,64 \text{ cm}$$

Conforme a excentricidades mostradas na Figura 73, a Figura 130 mostra as situações de cálculo para a seção intermediária, onde em cada direção deve ser assumida a maior excentricidade entre a de 1ª ordem (na seção C) e aquela correspondente ao momento fletor mínimo.

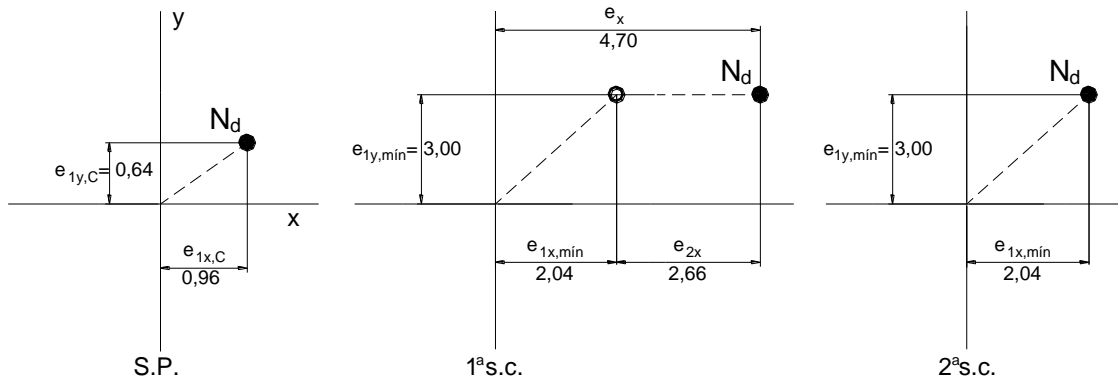


Figura 130 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária C.

Nota-se que a solicitação mostrada na 1ª s.c. da seção intermediária é aquela que conduz à maior armadura do pilar, como mostrado adiante. Os momentos fletores totais são:

$$\text{Dir. x: } M_{d,tot,x} = N_d \cdot e_x = 1250 \cdot 4,70 = 5.875 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_y = 1250 \cdot 3,00 = 3.750 \text{ kN.cm}$$

e3) Com a Eq. 96 (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$$

Como a seção crítica é a intermediária, os momentos fletores totais podem ser determinados apenas para essa seção, em cada direção:

**Dir. x:** com  $\alpha_{b,x} = 0,4$  deve-se ter:  $\alpha_b M_{1d,A} = 0,4 \cdot 3000 = 1.200 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 2.550 \text{ kN.cm}$  (não ok!), portanto, deve ser considerado o momento fletor mínimo, acrescido do momento fletor  $M_{2d,x}$ :

$$M_{d,tot,x} = 2.550 + 1.250 \frac{350^2}{10} 2,1701 \cdot 10^{-4} = 5.873 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:** não ocorre momento fletor de 2ª ordem, e com  $\alpha_{b,y} = 1,0$  deve-se ter:  $\alpha_b M_{1d,A} = 1,0 \cdot 2000 = 2.000 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 3.750 \text{ kN.cm}$  (não ok!), portanto:  $M_{d,tot,y} = M_{1d,mín,y} = 3.750 \text{ kN.cm}$ .

Portanto, na seção mais solicitada (intermediária), os momentos fletores totais a serem considerados no cálculo da armadura do pilar são:  $M_{d,tot,x} = 5.873 \text{ kN.cm}$  e  $M_{d,tot,y} = 3.750 \text{ kN.cm}$ .

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*)

$$19200 M_{Sd,tot}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,tot} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Aplicando na **direção x** (onde ocorre  $e_2$ ) e com  $M_{1d,A,x} = 3.000 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 2.550 \text{ kN.cm}$ ,  $h_x = 18 \text{ cm}$ ,  $\alpha_{b,x} = 0,4$  e  $\lambda_x = 67,3$ , tem-se:

$$19200 M_{Sd,tot}^2 + (3840 \cdot 18 \cdot 1250 - 67,3^2 \cdot 18 \cdot 1250 - 19200 \cdot 0,4 \cdot 3000) M_{Sd,tot} - 3840 \cdot 0,4 \cdot 18 \cdot 1250 \cdot 3000 = 0$$

$$19200 M_{Sd,tot}^2 - 38.549.025 M_{Sd,tot} - 1.0368 \cdot 10^{11} = 0$$

$$M_{Sd,tot}^2 - 2.007,8 M_{Sd,tot} - 5.400.000 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{Sd,tot,x} = 3.535 \text{ kN.cm} \geq M_{Id,A,x} = 3.000 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$

#### e5) Cálculo da armadura longitudinal

Os momentos fletores totais são: **dir. x**,  $M_{d,tot,x} = 5.875 \text{ kN.cm}$ , e **dir. y**,  $M_{d,tot,y} = 3.750 \text{ kN.cm}$ , os quais correspondem às excentricidades mostradas na 1ª s.c. da seção intermediária (Figura 130). Essa s.c. é a crítica e que conduz à maior armadura. Os coeficientes adimensionais da *Flexão Composta Oblíqua* são (Eq. 54 e Eq. 55):

$$\mu_x = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{5.875}{18.900 \frac{2,5}{1,4}} = 0,20 \quad , \text{ ou } \quad \mu_x = v \frac{e_x}{h_x} = 0,78 \frac{4,70}{18} = 0,20$$

$$\mu_y = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3.750}{50.900 \frac{2,5}{1,4}} = 0,05 \quad , \text{ ou } \quad \mu_y = v \frac{e_y}{h_y} = 0,78 \frac{3,00}{50} = 0,05$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{5,0}{18} = 0,28 \sim 0,25^{(\text{Nota } 84)} \quad \frac{d'_y}{h_y} = \frac{5,0}{50} = 0,10$$

Em função dos momentos fletores solicitantes totais (máximos) que ocorrem no pilar, observa-se que o maior momento fletor é na direção da largura  $h_x$  do pilar ( $M_{d,tot,x} = 5.875 \text{ kN.cm}$ ), de modo que o melhor posicionamento da armadura é sua distribuição ao longo do comprimento do pilar, nos lados  $h_y$  (ver Figura 126), ou seja, a maior capacidade resistente do pilar será proporcionada com as barras distribuídas ao longo dos lados  $h_y$ .

Na Figura 131 estão mostrados os possíveis arranjos de armadura conforme Pinheiro (2009),<sup>85</sup> para a *Flexão Composta Oblíqua*. Os arranjos diferem em número e posição das barras, devendo ser obedecidos no detalhamento das barras da armadura no pilar. O arranjo número 4, com apenas quatro barras nos cantos, é indicado apenas para pilares quadrados ou de menores dimensões, como 20/20. E como foi visto no item 11.2.2, o espaçamento máximo entre duas barras de armadura é de 40 cm, de modo que como o pilar deste exemplo tem comprimento de 50 cm, o arranjo 4 não é adequado. O arranjo 1 também não é indicado porque o número de barras é elevado. Os demais arranjos são mais indicados, principalmente os arranjos 2 e 3.

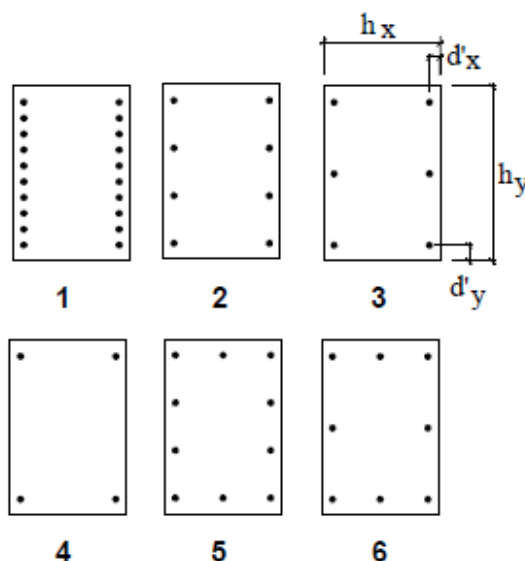


Figura 131 – Arranjos de armadura no pilar conforme Pinheiro (2009), para a *Flexão Composta Oblíqua*.

<sup>84</sup> Utilizar um ábaco com relação  $d'/h$  menor é contra a segurança.

<sup>85</sup> A publicação com os ábacos de PINHEIRO (2009) pode ser baixada em (25/08/21): <http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Abacos Flexao Obligua Pinheiro>

Escolhido o arranjo de barras na seção transversal do pilar, deve-se verificar um ábaco que apresente as relações  $d'_x/h_x$  (0,25) e  $d'_y/h_y$  (0,10), conforme calculadas. Na Figura 132 (Tabela 1 de Pinheiro, 2009), consta a relação de ábacos, conforme os diferentes arranjos de armadura e as relações  $d'_x/h_x$  e  $d'_y/h_y$ . Para o arranjo 2 (8 barras), pode ser utilizado o ábaco 5 (Figura 133).

Arranjo	$\frac{d'_y}{h_y}$	$\frac{d'_x}{h_x}$	Ábaco
1	0,05	0,25	1
2	0,05	0,25	2
3	0,05	0,25	3
1	0,10	0,25	4
2	0,10	0,25	5
3	0,10	0,25	6
4	0,10	0,25	7
2	0,15	0,25	8
3	0,15	0,25	9
4	0,15	0,25	10
1	0,05	0,20	11
2	0,05	0,20	12
3	0,05	0,20	13
1	0,10	0,20	14
2	0,10	0,20	15
3	0,10	0,20	16
4	0,10	0,20	17
2	0,15	0,20	18
3	0,15	0,20	19
4	0,15	0,20	20
1	0,05	0,15	21
2	0,05	0,15	22
3	0,05	0,15	23

Arranjo	$\frac{d'_y}{h_y}$	$\frac{d'_x}{h_x}$	Ábaco
5	0,05	0,15	24
1	0,10	0,15	25
2	0,10	0,15	26
3	0,10	0,15	27
4	0,10	0,15	28
6	0,10	0,15	29
5	0,10	0,15	30
2	0,15	0,15	31
3	0,15	0,15	32
4	0,15	0,15	33
6	0,15	0,15	34
5	0,15	0,15	35
2	0,05	0,10	36
6	0,05	0,10	37
5	0,05	0,10	38
1	0,10	0,10	39
2	0,10	0,10	40
3	0,10	0,10	41
4	0,10	0,10	42
6	0,10	0,10	43
5	0,10	0,10	44
6	0,05	0,05	45
5	0,05	0,05	46

Figura 132 – Relação dos ábacos de Pinheiro (2009) conforme os diferentes arranjos de armadura e relações  $d'_x/h_x$  e  $d'_y/h_y$ , para a Flexão Composta Oblíqua.

Nos ábacos de Pinheiro (2009), cada quadrante é relativo a um valor de  $v$  (ni), de modo que para o valor 0,78 é necessário fazer uma interpolação, para maior precisão. Com os valores adimensionais  $\mu$  (mi),  $\mu_x = 0,20$  e  $\mu_y = 0,05$ , são determinados os parâmetros  $\omega$  no ábaco 5A e 5B (Figura 133):

$$\begin{array}{l} v = 0,60 \rightarrow \omega = 0,70 \\ v = 0,80 \rightarrow \omega = 0,84 \end{array} \rightarrow \begin{cases} (0,80 - 0,60) \rightarrow (0,84 - 0,70) \\ (0,78 - 0,60) \rightarrow x = 0,126 \end{cases}$$

$$v = 0,78 \rightarrow \omega = 0,70 + ,0126 = 0,826$$

A armadura resulta:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,826 \cdot 900 \cdot 2,5}{43,5} = 30,52 \text{ cm}^2$$

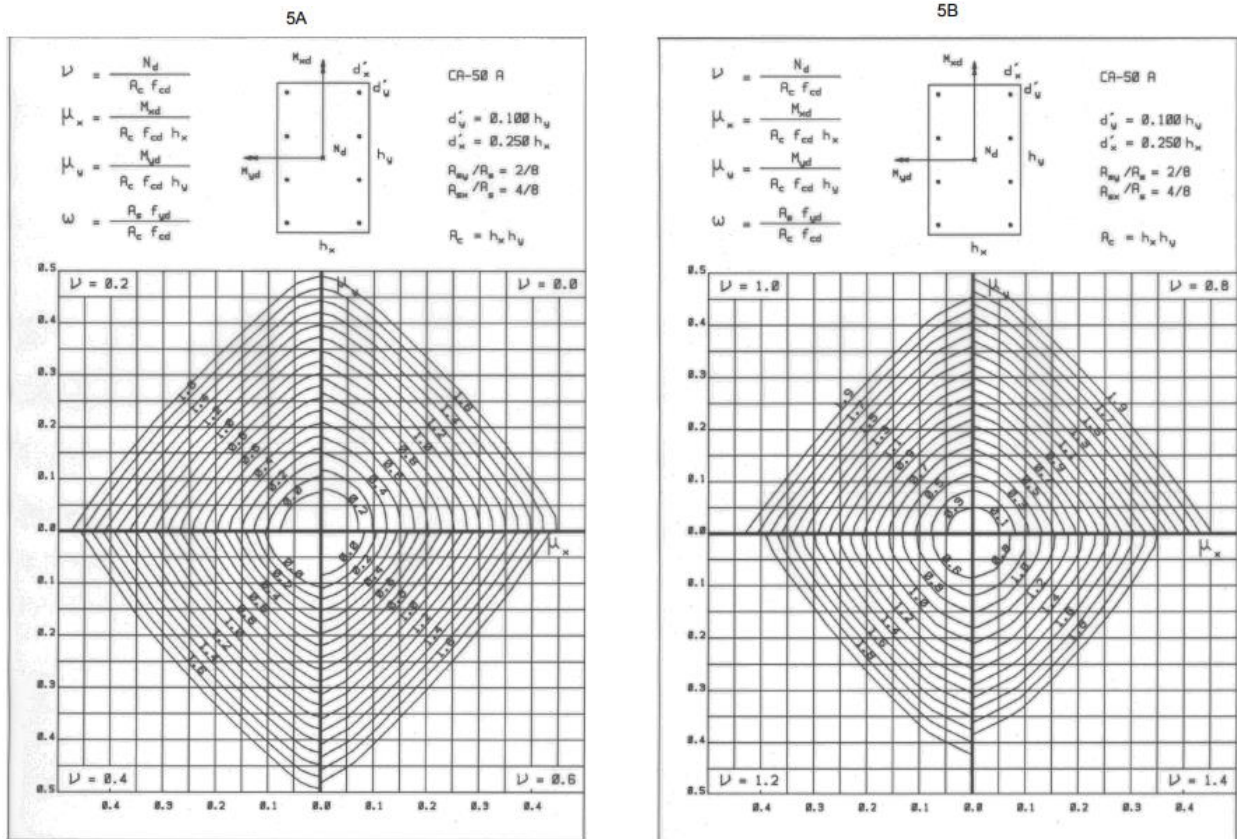


Figura 133 – Ábacos 5A e 5B de Pinheiro (2009).

Se aplicado o momento fletor total para a **direção x** ( $M_{Sd,tot,x} = 3.535$  kN.cm), resultante do cálculo segundo o *Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada*, e com  $M_{d,tot,y} = 3.750$  kN.cm, a armadura resulta:

$$\mu_x = \frac{M_{Sd,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3.535}{18.900 \frac{2,5}{1,4}} = 0,12 \quad \rightarrow \quad \text{e com o mesmo } \mu_y = 0,05, \text{ no mesmo ábaco 5 tem-se:}$$

$$\begin{aligned} v = 0,60 &\rightarrow \omega = 0,30 \\ v = 0,80 &\rightarrow \omega = 0,48 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (0,80 - 0,60) \rightarrow (0,48 - 0,30) \\ (0,78 - 0,60) \rightarrow x = 0,162 \end{cases}$$

$$v = 0,78 \rightarrow \omega = 0,30 + 0,0162 = 0,462$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,462 \cdot 900 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 17,07 \text{ cm}^2$$

e6) Com as excentricidades acidentais (*sem* consideração do momento fletor mínimo)

Com a Eq. 78 e Eq. 79 são calculados os valores:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{3,5}} = 0,005345 \text{ rad} \quad , \text{ com H igual à altura do lance do pilar. O valor mínimo é:}$$

$$\theta_{1\min} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \therefore \theta_1 = 0,005345 \text{ rad}$$

A excentricidade acidental na seção intermediária é:

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \quad \rightarrow \quad e_{ax} = e_{ay} = 0,005345 \frac{350}{2} = 0,94 \text{ cm}$$

E com base nas excentricidades mostradas na Figura 80 são desenhadas as excentricidades do pilar (Figura 134).

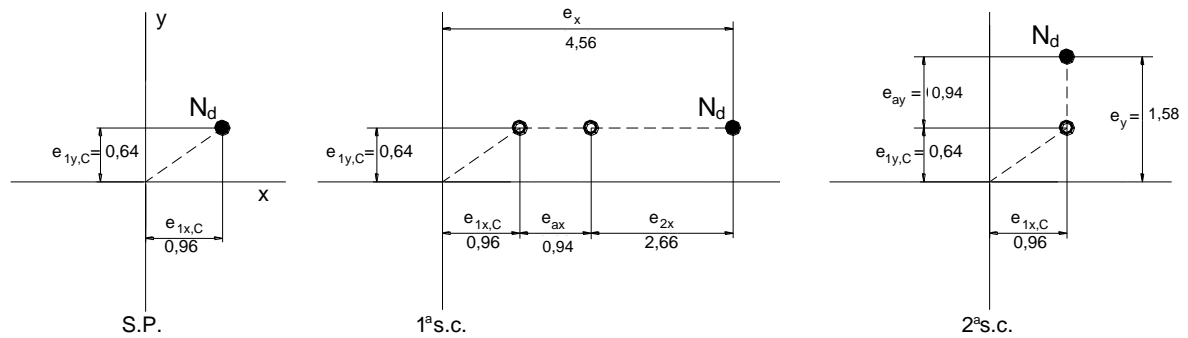


Figura 134 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na **excentricidade acidental** por falta de retilinearidade.

Da 1ª s.c. resulta a maior armadura:

$$\mu_x = v \frac{e_x}{h_x} = 0,78 \frac{4,56}{18} = 0,20 \quad ; \quad \mu_y = v \frac{e_y}{h_y} = 0,78 \frac{0,64}{50} = 0,01$$

$$d'_x/h_x = 0,25 \quad ; \quad d'_y/h_y = 0,10$$

Para  $v = 0,78$  no ábaco 5 tem-se:

$$\begin{aligned} v = 0,60 &\rightarrow \omega = 0,57 & \left\{ \begin{array}{l} (0,80 - 0,60) \rightarrow (0,73 - 0,57) \\ (0,78 - 0,60) \rightarrow x = 0,144 \end{array} \right. \\ v = 0,80 &\rightarrow \omega = 0,73 \end{aligned}$$

$$v = 0,78 \rightarrow \omega = 0,57 + ,0144 = 0,714$$

A armadura resulta:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,714 \cdot 900 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 26,38 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,min}$ )	30,52	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,min}$ )	17,07	- 44
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_a$ )	26,38	- 14

### 13.3.2 Exemplo 2

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura 135, considerando concreto C25, sendo conhecidos:

$$N_k = 850 \text{ kN}$$

$$M_{1k,A,x} = M_{1k,B,x} = 2.041 \text{ kN.cm}$$

$$M_{1k,A,y} = -M_{1k,B,y} = 1.360,5 \text{ kN.cm}$$

seção transversal 18 x 50  
 $(A_c = 900 \text{ cm}^2)$   
 comprimento equivalente:  
 $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 350 \text{ cm}$

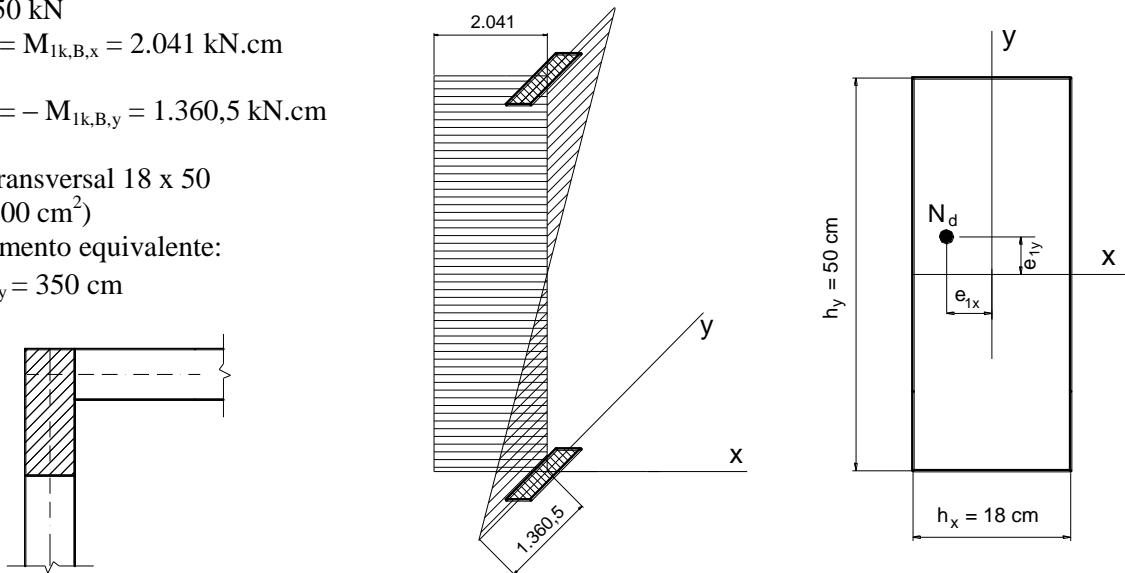


Figura 135 – Arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma, dimensões da seção transversal e posição do ponto de aplicação da força normal  $N_d$ .

### Resolução

#### a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é:  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,05 \cdot 1,4 \cdot 850 = 1.250 \text{ kN}$  ( $\gamma_n = 1,05$  na Tabela 6). Atuam também momentos fletores de 1ª ordem na base e no topo do pilar,  $M_{1k,A,x} = M_{1k,B,x} = 2.041 \text{ kN.cm}$  na direção x, e  $M_{1k,A,y} = -M_{1k,B,y} = 1.360,5 \text{ kN.cm}$  na direção y (Figura 135). Esses momentos fletores também devem ser majorados com os coeficientes  $\gamma_n$  e  $\gamma_f$ :

$$M_{1d,A,x} = M_{1d,B,x} = 1,05 \cdot 1,4 \cdot 2.041 = 3.000 \text{ kN.cm}$$

$$M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1,05 \cdot 1,4 \cdot 1.360,5 = 2.000 \text{ kN.cm}$$

As excentricidades de 1ª ordem, na base e no topo do pilar, são (Figura 136):

$$\text{Dir. x: } e_{1x,A} = e_{1x,B} = \frac{M_{1d,x}}{N_d} = \frac{3000}{1250} = 2,40 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } e_{1y,A} = -e_{1y,B} = \frac{M_{1d,y}}{N_d} = \frac{2000}{1250} = 1,60 \text{ cm}$$

#### b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 350}{18} = 67,3$$

(pilar medianamente esbelto na **dir. x**)

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 350}{50} = 24,2$$

(pilar curto na **dir. y**)

$$\lambda_{\text{máx}} = 67,3 \leq 90 \rightarrow \text{ok}$$

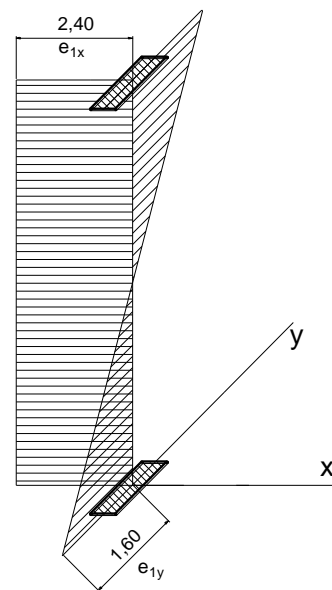


Figura 136 – Excentricidades de 1ª ordem (cm) nas direções x e y do pilar.

#### c) Momento fletor mínimo

$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$ , com **h** em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\text{mín},x} = 1250 (1,5 + 0,03 \cdot 18) = 2.550 \text{ kN.cm} ; e_{1x,\text{mín}} = \frac{2550}{1250} = 2,04 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\text{mín},y} = 1250 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.750 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\text{mín}} = \frac{3750}{1250} = 3,00 \text{ cm}$$

d) *Esbeltez limite*

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** o momento fletor de 1ª ordem é constante e  $M_{1d,A,x} = 3.000 \text{ kN.cm}$  é maior que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\text{mín},x} = 2.550 \text{ kN.cm}$ ), o que leva ao cálculo de  $\alpha_b$ :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{3000}{3000} = 1,0 \geq 0,4 \quad \rightarrow \quad \therefore \alpha_{b,x} = 1,0$$

E com  $h_x = 18 \text{ cm}$  e a excentricidade de 1ª ordem  $e_1 = 2,40 \text{ cm}$ :

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{2,40}{18}}{1,0} = 26,7 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

**Dir. y:** o momento fletor de 1ª ordem  $M_{1d,A,y} = 2.000 \text{ kN.cm}$  é menor que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\text{mín},y} = 3.750 \text{ kN.cm}$ ), o que significa  $\alpha_b = 1,0$ . Com a excentricidade de 1ª ordem  $e_1 = 1,60 \text{ cm}$ :

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,60}{50}}{1,0} = 25,4 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 67,3 > \lambda_{1,x} = 35 \rightarrow$  **são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 24,2 < \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

Da mesma forma que o pilar do Exemplo 1, a **direção x** é a crítica para o pilar, com  $e_2$  e  $M_{2d}$ . No entanto, os momentos fletores na **direção y** também ser necessitam ser considerados, por tratar-se de *Flexão Composta Oblíqua*. Deve ser verificada em qual seção (de extremidade ou intermediária) ocorre a situação que conduz à maior armadura no pilar.

e) *Cálculo dos momentos fletores totais e da armadura*

e1) *Com os diagramas de momentos fletores (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)*

Os cálculos dos efeitos de 2ª ordem na **direção x** estão mostrados no Exemplo 1, sendo os mesmos para este exemplo:  $\nu = 0,78$ ,  $e_{2x} = 2,66 \text{ cm}$  e  $M_{2d,x} = 3.325 \text{ kN.cm}$ . Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 137. Devem ser determinados os momentos fletores totais (máximos), em cada direção, nas seções de extremidade e intermediária C. As seções de extremidade do topo e da base são iguais neste caso, e.<sup>86</sup>

**Seção de extremidade (topo = base):**

$$\text{Dir. x: } M_{d,\text{tot},x} \geq \begin{cases} M_{1d,A,x} = 3.000 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,\text{mín},x} = 2.550 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,\text{tot},y} \geq \begin{cases} M_{1d,A,y} = 2.000 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,\text{mín},y} = 3.750 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

<sup>86</sup> No caso de momentos fletores de 1ª ordem diferentes na base e no topo, deve-se buscar a combinação mais desfavorável ao pilar.

Portanto:  $M_{d,tot,x} = 3.000 \text{ kN.cm}$  e  $M_{d,tot,y} = 3.750 \text{ kN.cm}$ .

### Seção intermediária (C):

**Dir. x:** nesta direção ocorre  $M_{2d,x} = 3.325 \text{ kN.cm}$ , e como o momento fletor de 1ª ordem é constante, não é necessário calcular  $M_{1d,C,x}$  (ver Figura 137), e:

$$M_{d,tot,x} \geq \begin{cases} M_{1d,A,x} + M_{2d,x} = 3.000 + 3.325 = 6.325 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,x} + M_{2d,x} = 2.550 + 3.325 = 5.875 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

Portanto,  $M_{d,tot,x} = 6.325 \text{ kN.cm}$

**Dir. y:** o momento fletor de 1ª ordem na seção intermediária é  $M_{1d,C,y}$ , e:

$$M_{1d,C,y} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A,y} + 0,4 M_{1d,B,y} \\ 0,4 M_{1d,A,y} \end{cases} \rightarrow M_{1d,C,y} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot 2000 + 0,4 \cdot (-2000) = 400 \text{ kN.cm} \\ 0,4 \cdot 2000 = 800 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$\therefore M_{1d,C,y} = 800 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 3.750 \text{ kN.cm} \rightarrow$  não ok!

Portanto,  $M_{d,tot,y} = M_{1d,mín,y} = 3.750 \text{ kN.cm}$

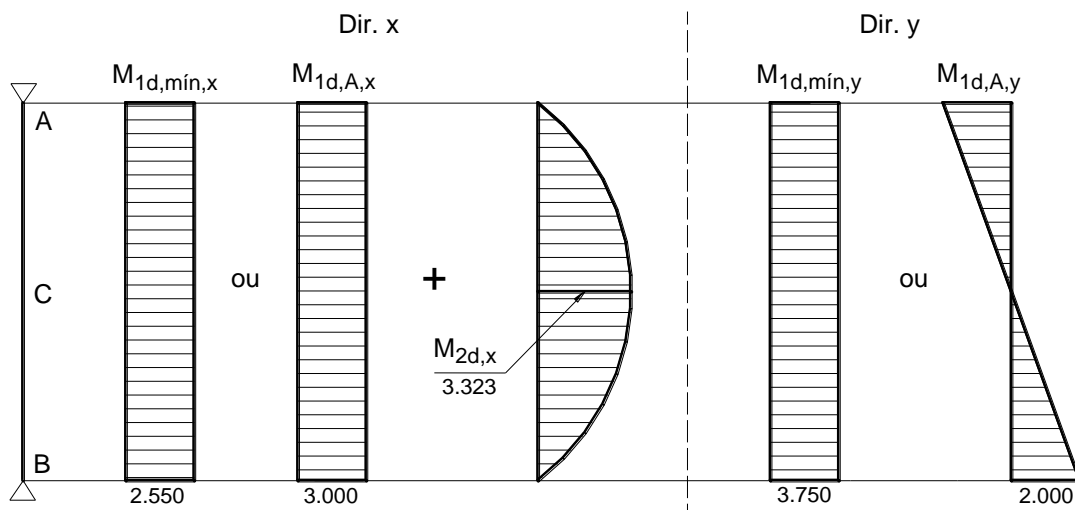


Figura 137 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

### e2) Com os diagramas das excentricidades (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)

Tomando como base as excentricidades mostradas na Figura 72 e Figura 73 são desenhadas na Figura 138 e Figura 139 as situações de projeto e de cálculo, para as seções de extremidade e intermediária. Como as seções de extremidade de topo e base do pilar estão submetidas aos mesmos momentos fletores de 1ª ordem, as seções são iguais.<sup>87</sup>

<sup>87</sup> Quando os momentos fletores são diferentes, deve-se buscar a extremidade que conduza a maior armadura do pilar.

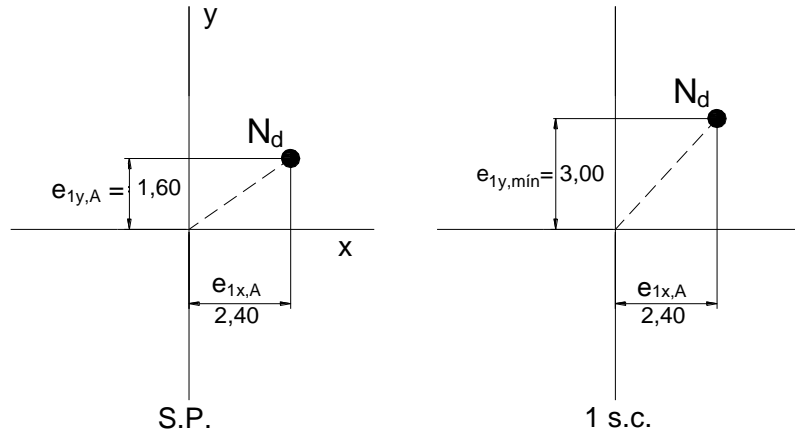


Figura 138 – Situações de projeto e de cálculo das seções de extremidade (topo e base).

Para a seção intermediária C tem-se que o momento fletor de 1ª ordem é constante na **dir. x**, portanto:  $e_{1x,C} = e_{1x,A} = 2,40$  cm. Na **dir. y** deve ser calculada a excentricidade (Eq. 95):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1y,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1y,A} + 0,4 e_{1y,B} = 0,6 \cdot 1,60 + 0,4 (-1,60) = 0,32 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1y,A} = 0,4 \cdot 1,60 = 0,64 \text{ cm} \end{cases}$$

$\therefore e_{1y,C} = 0,64 \text{ cm} \geq e_{1,min,y} = 3,00 \text{ cm} \rightarrow$  não ok! , portanto deve ser adotada  $e_{1,min,y} = 3,00 \text{ cm}$  nas situações de cálculo (ver Figura 73)

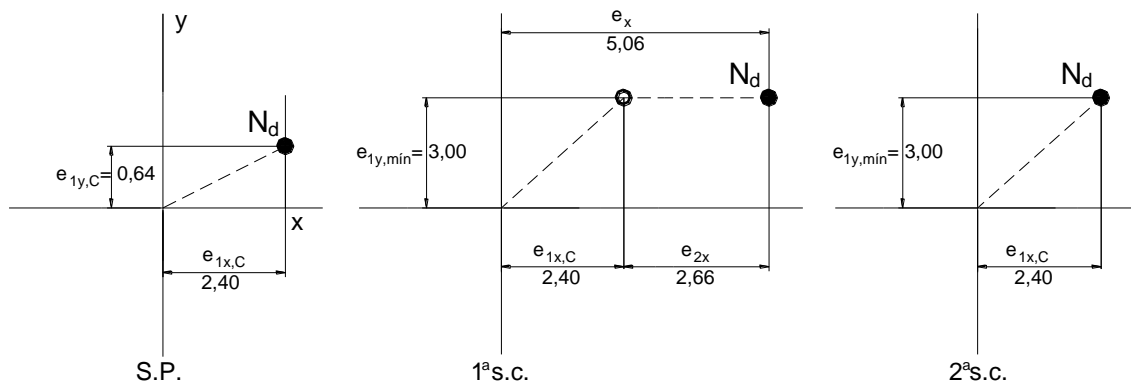


Figura 139 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária C.

Nota-se que a solicitação mostrada na 1ª s.c. da seção intermediária é aquela que conduz à maior armadura do pilar, como mostrado adiante. Os momentos fletores totais são:

$$\text{Dir. x: } M_{d,tot,x} = N_d \cdot e_x = 1250 \cdot 5,06 = 6.325 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_y = 1250 \cdot 3,00 = 3.750 \text{ kN.cm}$$

e3) Com a Eq. 96 (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

Como a seção crítica é a intermediária, os momentos fletores totais podem ser determinados apenas para essa seção, em cada direção.

**Dir. x:** com  $\alpha_{b,x} = 1,0$  tem-se  $\alpha_b M_{1d,A} = 1,0 \cdot 3000 = 3.000 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,min,x} = 2.550 \text{ kN.cm}$  (ok!), portanto:

$$M_{d,tot,x} = 1,0 \cdot 3000 + 1250 \cdot 2,66 = 6.325 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:** não ocorre momento fletor de 2ª ordem, e com  $\alpha_{b,y} = 1,0$  tem-se  $\alpha_b M_{1d,A} = 1,0 \cdot 2000 = 2.000$  kN.cm  $\geq M_{1d,\min,y} = 3.750$  kN.cm, portanto:  $M_{d,\text{tot},y} = 3.750$  kN.cm.

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - **Método do pilar-padrão com rigidez  $K$  aproximada**)

$$19200M_{Sd,\text{tot}}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,\text{tot}} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Aplicando na **direção x** e fazendo  $\alpha_{b,x} = 1,0$ ,  $h_x = 18$  cm,  $\lambda_x = 67,3$  e  $M_{1d,A,x} = 3.000$  kN.cm  $\geq M_{1d,\min,x} = 2.550$  kN.cm, tem-se:

$$19200M_{Sd,\text{tot}}^2 + (3840 \cdot 18 \cdot 1250 - 67,3^2 \cdot 18 \cdot 1250 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 3000) M_{Sd,\text{tot}} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 18 \cdot 1250 \cdot 3000 = 0$$

$$19200M_{Sd,\text{tot}}^2 - 73.109.025M_{Sd,\text{tot}} - 2,592 \cdot 10^{11} = 0$$

$$M_{Sd,\text{tot}}^2 - 3.807,8 M_{Sd,\text{tot}} - 13.500.000 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{Sd,\text{tot},x} = 6.042$  kN.cm  $\geq M_{1d,A,x} = 3.000$  kN.cm

e5) **Cálculo da armadura longitudinal**

Para o **Método do pilar-padrão com curvatura aproximada**, nota-se que entre as três situações de cálculo, é a 1ª s.c. da seção intermediária que resultará na maior armadura. Fazendo os cálculos dos coeficientes adimensionais da *Flexão Composta Obliqua* por meio dos momentos fletores e também com as excentricidades, tem-se:

$$\mu_x = \frac{M_{d,\text{tot},x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{6.325}{18 \cdot 900 \frac{2,5}{1,4}} = 0,22 \quad , \text{ ou } \quad \mu_x = v \frac{e_x}{h_x} = 0,78 \frac{5,06}{18} = 0,22$$

$$\mu_y = \frac{M_{d,\text{tot},y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3.750}{50 \cdot 900 \frac{2,5}{1,4}} = 0,05 \quad , \text{ ou } \quad \mu_y = v \frac{e_y}{h_y} = 0,78 \frac{3,00}{50} = 0,05$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{5,0}{18} = 0,28 \sim 0,25 \quad \frac{d'_y}{h_y} = \frac{5,0}{50} = 0,10$$

Como no Exemplo 1, para os ábacos 5A e 5B de Pinheiro (2009, Figura 133) com  $v = 0,78$  tem-se:

$$\begin{array}{l} v = 0,60 \rightarrow \omega = 0,81 \\ v = 0,80 \rightarrow \omega = 0,94 \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (0,80 - 0,60) \rightarrow (0,94 - 0,81) \\ (0,78 - 0,60) \rightarrow x = 0,117 \end{array} \right.$$

$$v = 0,78 \rightarrow \omega = 0,81 + ,0117 = 0,927$$

A armadura resulta:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,927 \cdot 900 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 34,25 \text{ cm}^2$$

Se aplicado o momento fletor total para a direção x ( $M_{Sd,\text{tot},x} = 6.042$  kN.cm), do cálculo com o *Método do pilar-padrão com rigidez  $K$  aproximada*, e com  $M_{d,\text{tot},y} = 3.750$  kN.cm, a armadura resulta:

$$\mu_x = \frac{M_{Sd,\text{tot},x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{6042}{18 \cdot 900 \frac{2,5}{1,4}} = 0,21 \quad \rightarrow \quad \text{e com } \mu_y = 0,05, \text{ no mesmo ábaco 5 tem-se:}$$

$$\begin{aligned} v = 0,60 &\rightarrow \omega = 0,76 \\ v = 0,80 &\rightarrow \omega = 0,89 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (0,80 - 0,60) \rightarrow (0,89 - 0,76) \\ (0,78 - 0,60) \rightarrow x = 0,117 \end{cases}$$

$$v = 0,78 \rightarrow \omega = 0,76 + ,0117 = 0,877$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,877 \cdot 900 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 32,40 \text{ cm}^2$$

e6) Com as excentricidades acidentais (sem consideração do momento fletor mínimo)

A excentricidade acidental por falta de retilinearidade é considerada na seção intermediária C (Figura 60), e com a Eq. 78 e Eq. 79 tem-se:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{3,5}} = 0,005345 \text{ rad}$$

$$\text{O valor mínimo é: } \theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \therefore \theta_1 = 0,005345 \text{ rad}$$

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \quad \rightarrow \quad e_{ax} = e_{ay} = 0,005345 \frac{350}{2} = 0,94 \text{ cm}$$

Com base nas excentricidades mostradas na Figura 80 são desenhadas as excentricidades do pilar (Figura 140).

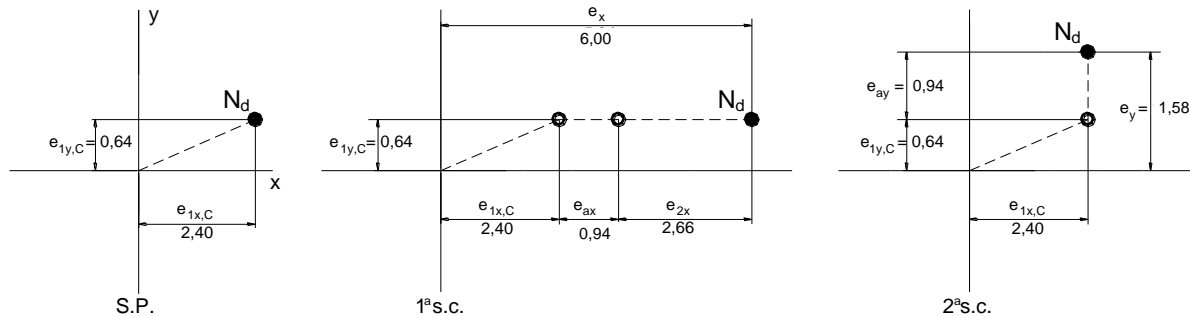


Figura 140 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na excentricidade acidental por falta de retilinearidade.

A maior armadura resulta da 1ª s.c.:

$$\mu_x = v \frac{e_x}{h_x} = 0,78 \frac{6,00}{18} = 0,26 \quad ; \quad \mu_y = v \frac{e_y}{h_y} = 0,78 \frac{0,64}{50} = 0,01$$

$$d'_x/h_x = 0,28 \sim 0,25 \quad ; \quad d'_y/h_y = 0,10$$

Para  $v = 0,78$  e com o ábaco 5 (Figura 133) tem-se:

$$\begin{aligned} v = 0,60 &\rightarrow \omega = 0,87 \\ v = 0,80 &\rightarrow \omega = 1,01 \end{aligned} \quad \begin{cases} (0,80 - 0,60) \rightarrow (1,01 - 0,87) \\ (0,78 - 0,60) \rightarrow x = 0,126 \end{cases}$$

$$v = 0,78 \rightarrow \omega = 0,87 + ,0126 = 0,996$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,996 \cdot 900 \frac{2,5}{1,4}}{43,5} = 36,80 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $M_{1d,min}$ )	34,25	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada ( $M_{1d,min}$ )	32,40	- 5
Pilar-padrão com curvatura aproximada ( $e_d$ )	36,80	+ 7

**13.3.3 Exemplo 3**

Dimensionar a armadura longitudinal do pilar mostrado na Figura 141, sendo conhecidos:

concreto C30

$N_k = 350$  kN

$M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 3.500$  kN.cm

$M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.105$  kN.cm

seção transversal 15 x 30:

$A_c = 450$  cm<sup>2</sup>

comprimento equivalente:

$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 300$  cm

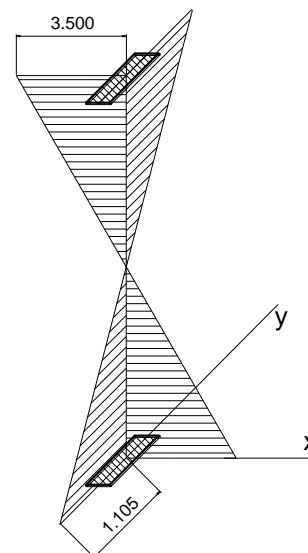
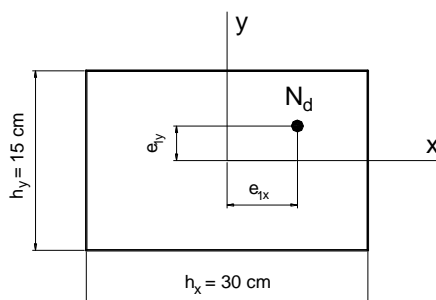
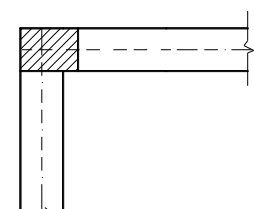


Figura 141 – Arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma, dimensões da seção transversal, posição do ponto de aplicação da força normal  $N_d$  e momentos fletores de 1ª ordem (kN.cm) nas direções  $x$  e  $y$ .

**Resolução****a) Esforços solicitantes**

A força normal de cálculo é:  $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,20 \cdot 1,4 \cdot 350 = 588$  kN ( $\gamma_n = 1,20$  na Tabela 6). Atuam também momentos fletores de 1ª ordem na base e no topo do pilar,  $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 3.500$  kN.cm na **direção x**, e  $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.105$  kN.cm na **direção y** (Figura 141), em função de existirem duas vigas não contínuas sobre o pilar, nas direções  $x$  e  $y$ . Os momentos fletores já se encontram majorados pelos coeficientes  $\gamma_n$  e  $\gamma_f$ . As excentricidades de 1ª ordem, na base e no topo do pilar, são (Figura 142):

$$\text{Dir. x: } e_{1x,A} = -e_{1x,B} = \frac{M_{1d,x}}{N_d} = \frac{3500}{588} = 5,95 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } e_{1y,A} = -e_{1y,B} = \frac{M_{1d,y}}{N_d} = \frac{1105}{588} = 1,88 \text{ cm}$$

**b) Índice de esbeltez**

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 300}{30} = 34,6$$

(pilar curto na **direção x**)

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 300}{15} = 69,2$$

(pilar medianamente esbelto na **direção y**)

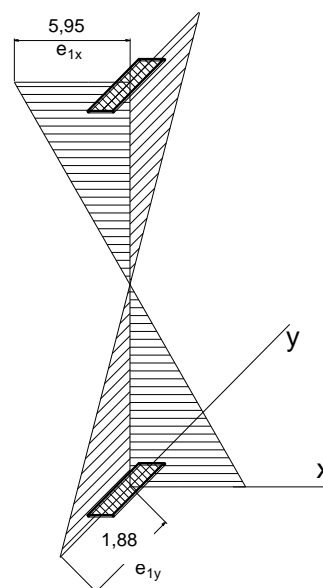


Figura 142 – Excentricidades de 1ª ordem (cm) nas direções x e y do pilar.

$$\lambda_{\text{máx}} = 69,2 \leq 90 \rightarrow \text{ok!}$$

c) *Momento fletor mínimo*

$$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h), \text{ com } h \text{ em cm}$$

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\text{mín},x} = 588 (1,5 + 0,03 \cdot 30) = 1.411 \text{ kN.cm} ; e_{1x,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 30) = 2,40 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\text{mín},y} = 588 (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 1.147 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\text{mín}} = (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 1,95 \text{ cm}$$

d) *Esbeltez limite*

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** o momento fletor de 1ª ordem  $M_{1d,A,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$  é maior que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\text{mín},x} = 1.411 \text{ kN.cm}$ ), o que leva ao cálculo de  $\alpha_b$  :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-3500)}{3500} = 0,2 \geq 0,4 \rightarrow \therefore \alpha_{b,x} = 0,4$$

A excentricidade de 1ª ordem correspondente ( $e_1$ ) na direção x é 5,95 cm, e:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{5,95}{30}}{0,4} = 68,7 \geq 35 \rightarrow \text{ok!}, \lambda_{1,x} = 68,7$$

**Dir. y:** o momento fletor de 1ª ordem  $M_{1d,A,y} = 1.105 \text{ kN.cm}$  é menor que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\text{mín},y} = 1.147 \text{ kN.cm}$ ), o que significa  $\alpha_{b,y} = 1,0$ , e com a excentricidade de 1ª ordem correspondente (1,88 cm) tem-se:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,88}{15}}{1,0} = 26,6 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 34,6 < \lambda_{1,x} = 68,7 \rightarrow \text{não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

$$\lambda_y = 69,2 > \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow \text{são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.}$$

e) *Cálculo dos momentos fletores totais e da armadura*

e1) *Com os diagramas de momentos fletores (Método do pilar-padrão com curvatura aproximada)*

Os efeitos locais de 2ª ordem na **direção y** devem ser calculados. A força normal adimensional é (Eq. 77):

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{588}{450 \frac{3,0}{1,4}} = 0,61$$

Curvatura na **dir. y** (Eq. 76):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,50)} = \frac{0,005}{15(0,61 + 0,5)} = 3,003 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h} = \frac{0,005}{15} = 3,333 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

$$\text{A excentricidade máxima de 2ª ordem é (Eq. 74): } e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10 r} = \frac{300^2}{10} 3,003 \cdot 10^{-4} = 2,70 \text{ cm}$$

O momento fletor de 2ª ordem é (Eq. 75):  $M_{2d,y} = N_d \frac{\ell_2^2}{10 r} = N_d \cdot e_2 = 588,270 = 1.588 \text{ kN.cm}$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 143. Devem ser determinados os momentos fletores totais (máximos), em cada direção, para as seções de extremidade e intermediária C, pois há efeito local de 2ª ordem que deve ser considerado na **dir. y**. A rigor, em função das diferentes combinações possíveis entre os momentos fletores de 1ª ordem nas seções de topo e base, segundo as duas direções do pilar, tanto a seção de topo como a de base devem ser analisadas. No caso deste exemplo, como os momentos fletores na base e no topo são iguais nas duas direções, apenas uma seção é suficiente.

### Seção de Extremidade (base e topo):

**Dir. x:**

$$M_{d,tot,x} \geq \begin{cases} M_{1d,A,x} = 3.500 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,x} = 1.411 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$$\therefore M_{d,tot,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:**

$$M_{d,tot,y} \geq \begin{cases} M_{1d,A,y} = 1.105 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,y} = 1.147 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$$\therefore M_{d,tot,y} = 1.147 \text{ kN.cm}$$

Na **seção intermediária** os momentos fletores nas duas direções são:

$$M_{1d,C,x} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A,x} + 0,4 M_{1d,B,x} \\ 0,4 M_{1d,A,x} \end{cases} \rightarrow M_{1d,C,x} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot 3.500 + 0,4 (-3.500) = 700 \text{ kN.cm} \\ 0,4 \cdot 3.500 = 1.400 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$$\therefore M_{1d,C,x} = 1.400 \text{ kN.cm}$$

$$M_{1d,C,y} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A,y} + 0,4 M_{1d,B,y} \\ 0,4 M_{1d,A,y} \end{cases} \rightarrow M_{1d,C,y} \geq \begin{cases} 0,6 \cdot 1.105 + 0,4 (-1.105) = 221 \text{ kN.cm} \\ 0,4 \cdot 1.105 = 442 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$$\therefore M_{1d,C,y} = 442 \text{ kN.cm}$$

### Seção Intermediária

**Dir. x:**

$$M_{d,tot,x} \geq \begin{cases} M_{1d,C,x} = 1.400 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,x} = 1.411 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$$\therefore M_{d,tot,x} = 1.411 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:**

$$M_{d,tot,y} \geq \begin{cases} M_{1d,C,y} + M_{2d,y} = 442 + 1.588 = 2.030 \text{ kN.cm} \\ M_{1d,mín,y} + M_{2d,y} = 1.147 + 1.588 = 2.735 \text{ kN.cm} \end{cases}$$

$$\therefore M_{d,tot,y} = 2.735 \text{ kN.cm}$$

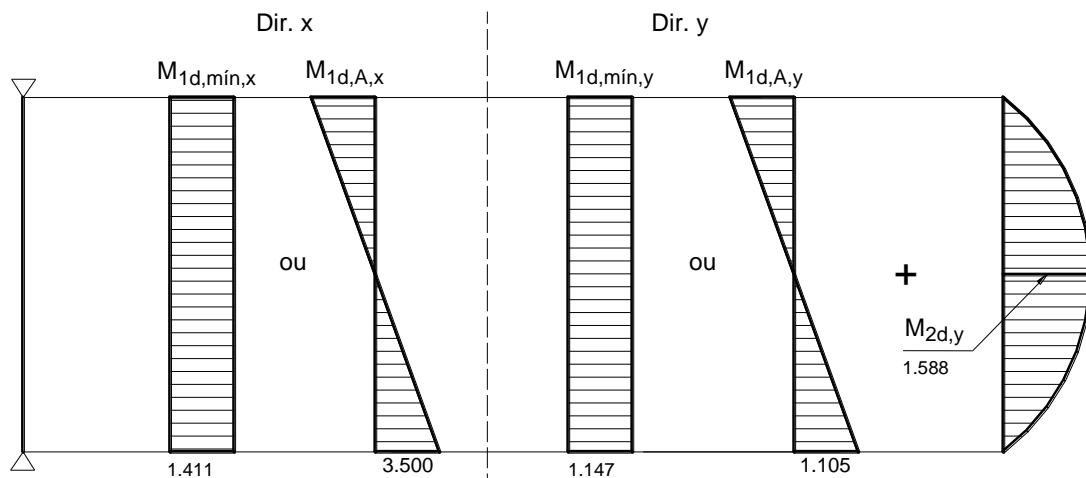


Figura 143 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

e2) Com os diagramas das excentricidades (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

As situações de projeto e de cálculo para as seções de extremidade e intermediária estão mostradas na Figura 144 e Figura 145, e tomam como base as excentricidades mostradas na Figura 72 e Figura 73. Como as seções de extremidade topo e base estão submetidas aos mesmos momentos fletores de 1ª ordem em cada direção, apenas uma seção de extremidade pode ser analisada.

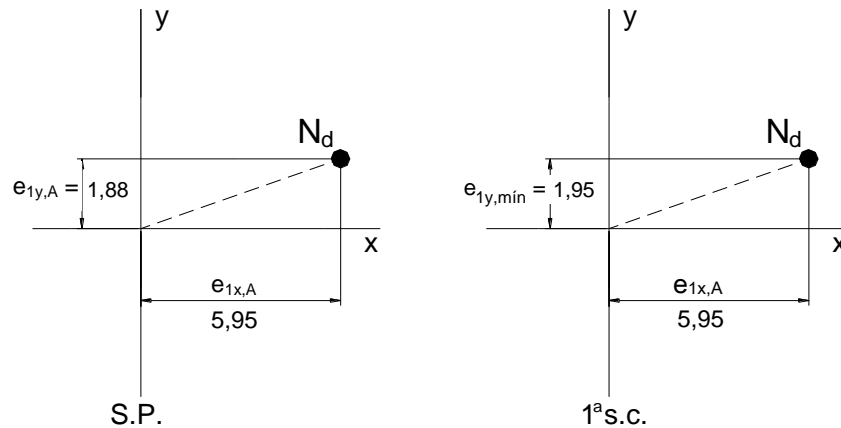


Figura 144 – Situações de projeto e de cálculo das **seções de extremidade** (topo e base).

A excentricidade de 1ª ordem na seção intermediária C é calculada com a Eq. 95, em cada direção:

**Dir. x:**

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 5,95 + 0,4 (-5,95) = 1,19 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 5,95 = 2,38 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 2,38 \text{ cm}$$

**Dir. y:**

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1y,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1y,A} + 0,4 e_{1y,B} = 0,6 \cdot 1,88 + 0,4 (-1,88) = 0,38 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1y,A} = 0,4 \cdot 1,88 = 0,75 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1y,C} = 0,75 \text{ cm}$$

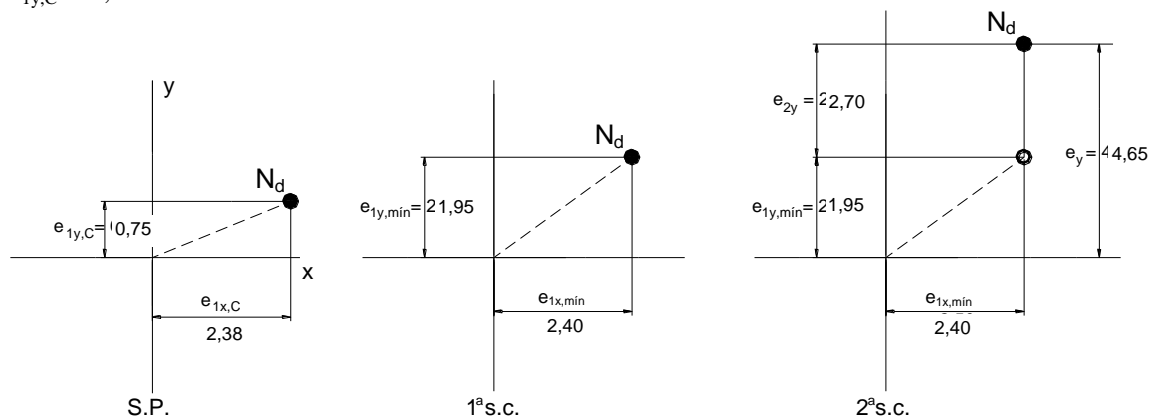


Figura 145 – Situação de projeto e situações de cálculo para a **seção intermediária C**.

Nota-se que a solicitação da 2ª s.c. da seção intermediária é aquela que conduz à maior armadura do pilar. Os momentos fletores totais são:

**Dir. x:**  $M_{d,tot,x} = N_d \cdot e_x = 588 \cdot 2,40 = 1.411 \text{ kN.cm}$

**Dir. y:**  $M_{d,tot,y} = N_d \cdot e_y = 588 \cdot 4,65 = 2.734 \text{ kN.cm}$

e3) Com a Eq. 96 (*Método do pilar-padrão com curvatura aproximada*)

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$$

Como a seção crítica é a intermediária, os momentos fletores totais podem ser determinados apenas para essa seção, em cada direção.

**Dir. x:** não ocorre momento fletor de 2ª ordem, e com  $\alpha_{b,x} = 0,4$  tem-se  $\alpha_b M_{1d,A} = 0,4 \cdot 3500 = 1.400$  kN.cm  $\geq M_{1d,\min,x} = 1.411$  kN.cm, portanto:  $M_{d,tot,x} = 1.411$  kN.cm.

**Dir. y:** ocorre momento fletor de 2ª ordem, e com  $\alpha_{b,y} = 1,0$  tem-se  $\alpha_b M_{1d,A} = 1,0 \cdot 1105 = 1.105$  kN.cm  $\geq M_{1d,\min,y} = 1.147$  kN.cm, e:

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} = 1.147 + 588 \cdot 2,70 = 2.735 \text{ kN.cm}$$

e4) Com a Eq. 102 (ou Eq. 99 a Eq. 101 - Método do pilar-padrão com rigidez  $K$  aproximada)

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200\alpha_b M_{1d,A}) M_{Sd,tot} - 3840\alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

Aplicando na **direção y** e fazendo  $M_{1d,A,y} = 1.105$  kN.cm  $\geq M_{1d,\min,y} = 1.147$  kN.cm, tem-se:

$$19200M_{Sd,tot}^2 + (3840 \cdot 15 \cdot 588 - 69,2^2 \cdot 15 \cdot 588 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 1147) M_{Sd,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 15 \cdot 588 \cdot 1147 = 0$$

$$19200M_{Sd,tot}^2 - 30.389.405 M_{Sd,tot} - 3.88475 \cdot 10^{10} = 0$$

$$M_{Sd,tot}^2 - 1.582,8 M_{Sd,tot} - 2.023.308 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é  $M_{Sd,tot,y} = 2.419$  kN.cm  $\geq M_{1d,A,y} = 1.105$  kN.cm

e5) Cálculo da armadura longitudinal

Para o *Método do pilar-padrão com curvatura aproximada* nota-se que entre as três situações de cálculo, é a 2ª s.c. da **seção intermediária** que resultará na maior armadura. Fazendo os cálculos também com os momentos fletores totais de cada direção, os coeficientes adimensionais da *Flexão Composta Oblíqua* são:

$$\mu_x = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1411}{30 \cdot 450 \frac{3,0}{1,4}} = 0,05 \quad , \text{ ou } \quad \mu_x = v \frac{e_x}{h_x} = 0,61 \frac{2,40}{30} = 0,05$$

$$\mu_y = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2735}{15 \cdot 450 \frac{3,0}{1,4}} = 0,19 \quad , \text{ ou } \quad \mu_y = v \frac{e_y}{h_y} = 0,61 \frac{4,65}{15} = 0,19$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{30} = 0,13 \approx 0,15 \quad \frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{15} = 0,27 \approx 0,25$$

Entre os vários arranjos de barras dos ábacos de Pinheiro (2009), (ver Figura 131), apenas o arranjo 1 não é indicado, pela elevada quantidade de barras (maior que 5 em cada face). Dos demais ábacos, apenas os arranjos 2, 3 e 4 têm relações  $d'_x/h_x = 0,15$  e  $d'_y/h_y = 0,25$  (ver Figura 132). Escolhendo por exemplo o ábaco 8 relativo ao arranjo 2, verifica-se que as quatro barras das faces devem ser posicionadas ao longo do lado  $h_y$  do pilar (Figura 146). No pilar deste Exemplo equivale a posicionar as quatro barras na dimensão de 15 cm do pilar, como mostrado na Figura 147a, que não configura o posicionamento mais racional e econômico em função dos momentos fletores solicitantes no pilar, pois para o maior momento fletor ( $M_{yd} = 2.735$  kN.cm) o posicionamento mais indicado é o apresentado na Figura 147b. Para aplicar o ábaco 8 posicionando-se as barras como mostradas na Figura 147b, torna-se necessário utilizar o ábaco com os valores trocados em relação aos valores calculados para as variáveis  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $d'_x/h_x$  e  $d'_y/h_y$ . Portanto, modificando os valores tem-se:

$$\mu_x = 0,19 \quad ; \quad \mu_y = 0,05 \quad ; \quad d'_x/h_x = 0,25 \quad ; \quad d'_y/h_y = 0,15$$

e com  $v = 0,61$  são determinados no Ábaco 8 os seguintes valores:

$$v = 0,60 \rightarrow \omega = 0,70$$

$$v = 0,80 \rightarrow \omega = 0,82$$

$$v = 0,61 \rightarrow \omega = 0,70 + 0,006 = 0,706$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,80 - 0,60) \rightarrow (0,82 - 0,70) \\ (0,61 - 0,60) \rightarrow x = 0,006 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow x = 0,006$$

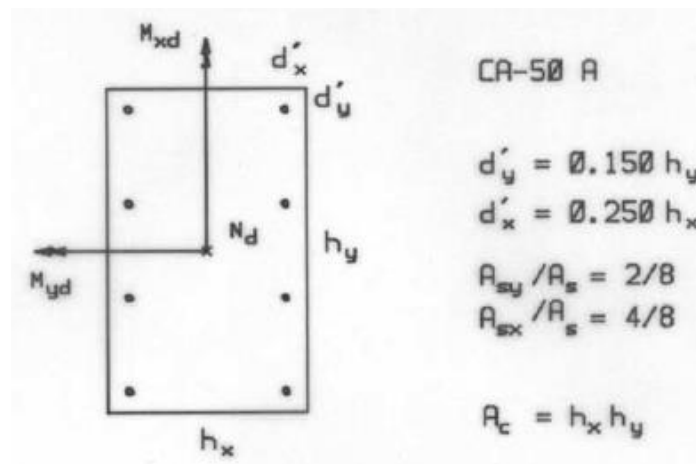
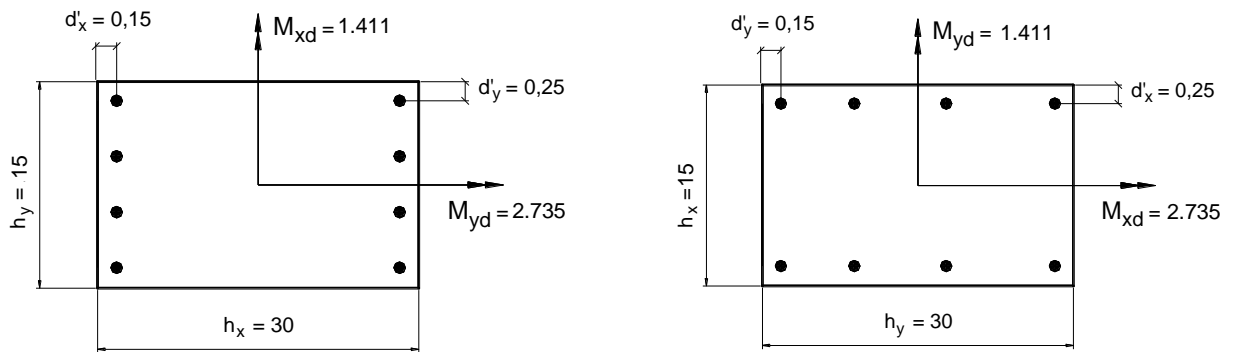


Figura 146 – Arranjo de barras da armadura do Ábaco 8 de Pinheiro (2009) para FCO.



a) posicionamento das barras de aço seção transversal do pilar conforme o dimensionamento;

b) armadura reposicionada após a modificação nos valores das variáveis do ábaco.

Figura 147 – Posicionamento das barras na seção transversal do pilar conforme o Ábaco 8 de Pinheiro (2009).

A armadura resulta:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,706 \cdot 450 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 15,65 \text{ cm}^2$$

com as barras da armadura a serem dispostas na seção transversal conforme o arranjo da Figura 147b.

Se aplicado o momento fletor total para a direção y ( $M_{Sd,tot,y} = 2.419 \text{ kN.cm}$ ), do cálculo com o Método do pilar-padrão com rigidez  $K$  aproximada, e com  $M_{d,tot,x} = 3.500 \text{ kN.cm}$ , a armadura resulta:

$$\mu_y = \frac{M_{Sd,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2419}{15 \cdot 450 \frac{3,0}{1,4}} = 0,17$$

no ábaco 8, com os valores modificados:  $\mu_x = 0,17$  ;  $\mu_y = 0,05$  ;  $d'_x/h_x = 0,25$  ;  $d'_y/h_y = 0,15$ , encontram-se:

$$\begin{aligned} v = 0,60 &\rightarrow \omega = 0,62 & \left\{ \begin{array}{l} (0,80 - 0,60) \rightarrow (0,72 - 0,62) \\ (0,61 - 0,60) \rightarrow x = 0,005 \end{array} \right. \\ v = 0,80 &\rightarrow \omega = 0,72 \\ v = 0,61 &\rightarrow \omega = 0,62 + 0,005 = 0,625 \end{aligned}$$

A armadura resulta:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,625 \cdot 450 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 13,85 \text{ cm}^2$$

e6) Com as excentricidades acidentais (sem consideração do momento fletor mínimo)

A excentricidade acidental por falta de retilinearidade é calculada com a Eq. 78 e Eq. 79, para a seção intermediária C (ver Figura 60):

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} = \frac{1}{100\sqrt{3,0}} = 0,005774 \text{ rad} \quad , \text{ com } H = \text{altura do lance em m.}$$

$$\theta_{1\text{mín}} = 1/300 = 0,00333 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \therefore \theta_1 = 0,005774 \text{ rad}$$

$$e_a = \theta_1 \frac{\ell_e}{2} \quad \rightarrow \quad e_{ax} = e_{ay} = 0,005774 \frac{300}{2} = 0,87 \text{ cm}$$

E com base nas excentricidades mostradas na Figura 80 são desenhadas as excentricidades do pilar (Figura 148).

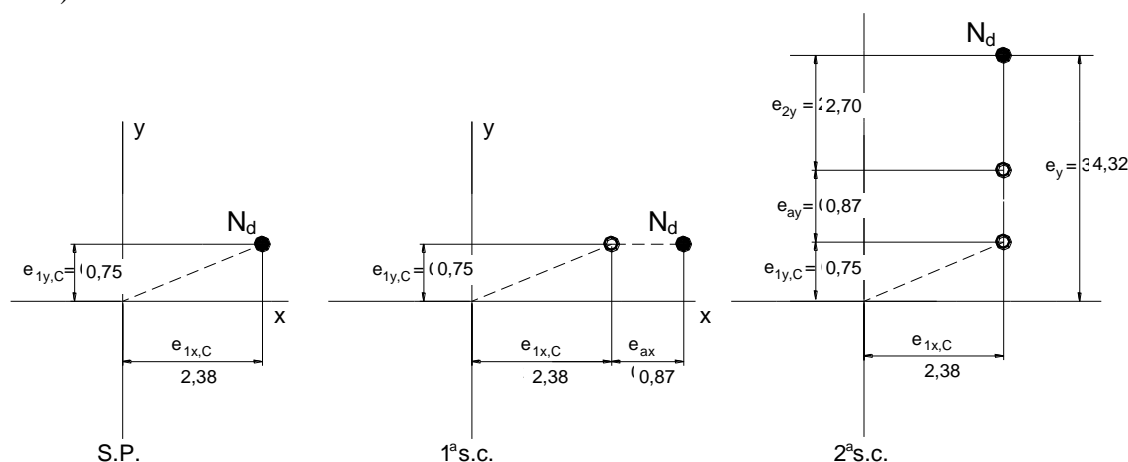


Figura 148 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária, para dimensionamento do pilar com base na excentricidade acidental por falta de retilinearidade.

A maior armadura resulta da 2ª s.c.:

$$\mu_x = v \frac{e_x}{h_x} = 0,61 \frac{2,38}{30} = 0,05 \quad ; \quad \mu_y = v \frac{e_y}{h_y} = 0,61 \frac{4,32}{15} = 0,18$$

$$d'_x/h_x \cong 0,15 \quad ; \quad d'_y/h_y \cong 0,25$$

no ábaco 8, com os valores modificados  $\mu_x = 0,18$  ;  $\mu_y = 0,05$  ;  $d'_x/h_x = 0,25$  ;  $d'_y/h_y = 0,15$ , encontram-se:

$$\begin{aligned} v = 0,60 &\rightarrow \omega = 0,65 & \left\{ \begin{array}{l} (0,80 - 0,60) \rightarrow (0,79 - 0,65) \\ (0,61 - 0,60) \rightarrow x = 0,007 \end{array} \right. \\ v = 0,80 &\rightarrow \omega = 0,79 \end{aligned}$$

$$v = 0,61 \rightarrow \omega = 0,62 + 0,007 = 0,627$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,627 \cdot 450 \cdot 3,0}{43,5} = 13,90 \text{ cm}^2$$

**Resumo:**

Método	A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )	%
Pilar-padrão com curvatura aproximada (M <sub>1d,mín</sub> )	15,65	100
Pilar-padrão com rigidez aproximada (M <sub>1d,mín</sub> )	13,85	- 11
Pilar-padrão com curvatura aproximada (e <sub>a</sub> )	13,90	- 11

#### 14. ESTIMATIVA DE CARGA VERTICAL EM PILARES POR ÁREA DE INFLUÊNCIA E PRÉ-DIMENSIONAMENTO DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Durante o desenvolvimento e desenho da planta de fôrma dos pavimentos é necessário definir as dimensões dos pilares, antes mesmo que se conheçam os esforços solicitantes neles atuantes, de modo que deve ser feito um pré-dimensionamento da seção transversal. Alguns processos podem ser utilizados na fixação das dimensões dos pilares, entre eles a experiência do engenheiro, mas um processo simples de pré-dimensionamento consiste na estimativa da carga vertical no pilar, determinada pela *área de influência*. Com a carga vertical estimada, a seção do pilar pode ser calculada. O conceito é de que a carga que se encontra dentro da *área de influência* do pilar “caminhará” até o pilar. A Figura 149 mostra como determinar a *área de influência* de modo simples.

Para a estimativa da carga é necessário ter um valor que represente a **carga total** por metro quadrado de laje do pavimento, levando-se em conta todos os carregamentos permanentes e variáveis. Para edifícios com fins residenciais e de escritórios, pode-se estimar a carga total de 10 kN/m<sup>2</sup>. Edifícios com outras finalidades de utilização podem ter cargas mais elevadas. A carga de um pavimento no pilar é a *área de influência* multiplicada pela carga total, e em um determinado lance do pilar, deve-se considerar os pavimentos acima do lance. É muito importante salientar que a carga estimada serve apenas para o pré-dimensionamento da seção transversal, e não pode ser utilizada no dimensionamento do pilar, o qual deve ser feito com os esforços solicitantes corretos, calculados em função das cargas das vigas e lajes apoiadas no pilar, e com a atuação das forças do vento e outras ações que existirem na estrutura.

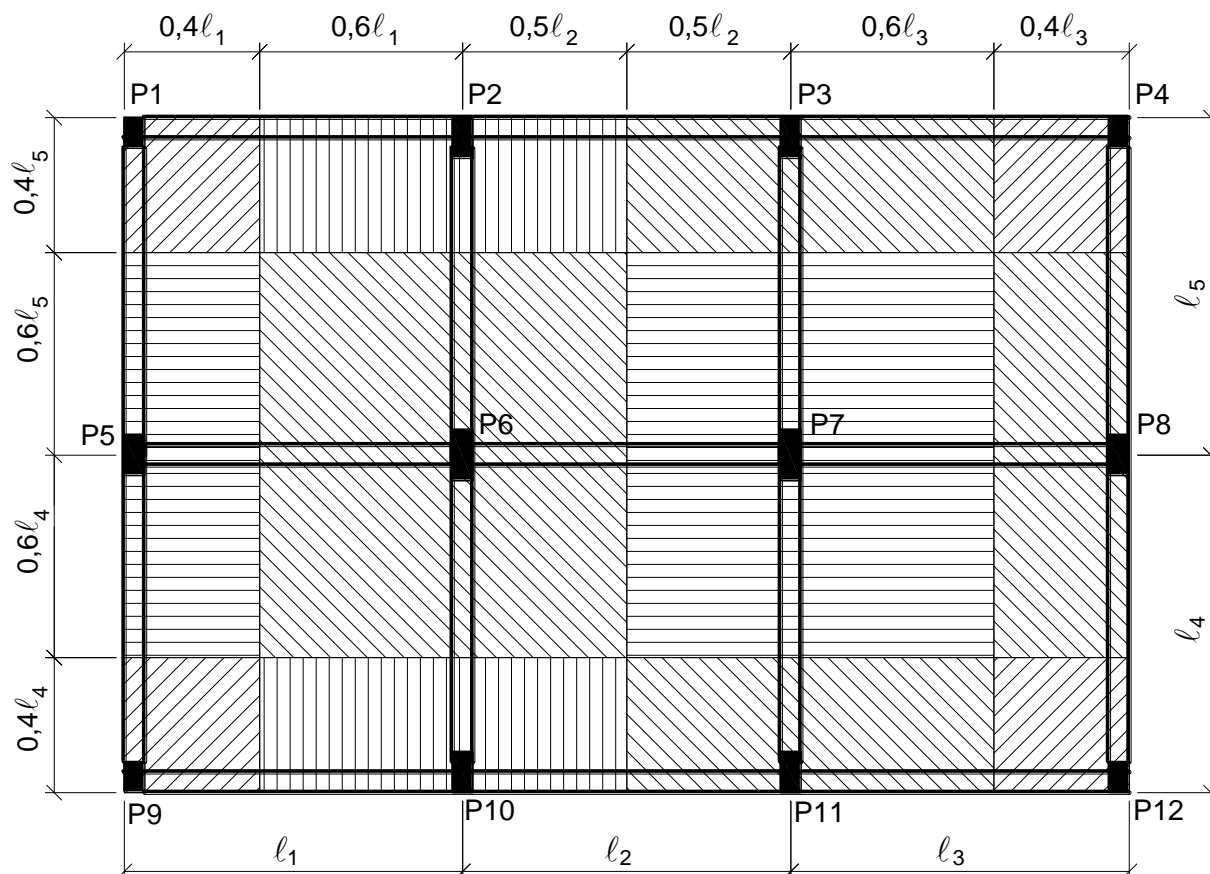


Figura 149 – Processo simplificado para determinação da área de influência dos pilares.

As equações seguintes para pré-dimensionamento da seção transversal são aplicadas apenas a pilares de edificações de **pequeno porte** (baixa altura). Edifícios onde a ação do vento origina solicitações significativas devem ter a seção transversal majorada em relação àquelas resultantes deste pré-dimensionamento, ou outras equações devem ser utilizadas. Fusco (1981) apresenta um processo simplificado para o pré-dimensionamento, o qual um pouco mais simplificando apresenta as equações para o aço CA-50:<sup>88</sup>

a) Pilar Intermediário

$$A_c = \frac{N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} \quad \text{Eq. 113}$$

b) Pilares de Extremidade e de Canto

$$A_c = \frac{1,5 N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} \quad \text{Eq. 114}$$

$A_c$  = área da seção transversal do pilar ( $\text{cm}^2$ );

$N_d$  = força normal de cálculo (kN);

$f_{ck}$  = resistência característica do concreto ( $\text{kN/cm}^2$ ).

## 15. EXEMPLOS DE DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE UMA EDIFICAÇÃO DE BAIXA ALTURA

São apresentados a seguir exemplos de dimensionamento de pilares de uma edificação de pequeno porte e de baixa altura. A Figura 150 mostra a planta de fôrma do pavimento tipo da edificação, com três pavimentos. Devido à baixa altura da edificação, os efeitos do vento não serão considerados.

<sup>88</sup> As equações podem ser refinadas para apresentarem resultados melhores, em função de algumas variáveis, principalmente da largura de pilares retangulares.

A planta de fôrma foi concebida considerando que existem paredes de alvenaria de vedação ao longo de toda a periferia da edificação, com espessura de “um tijolo”, confeccionadas com blocos cerâmicos de dimensão 19 cm, de modo que as vigas e pilares da periferia foram especificados com largura de 19 cm, a fim de ficarem embutidos nas paredes. Já as paredes internas, sobre as vigas V2, V3 e V6, são de “meio tijolo”, construídas com blocos cerâmicos de vedação de dimensão 14 cm, de modo que essas vigas têm largura de 14 cm. Os pilares P5 e P8, com intenção de também ficarem embutidos nas paredes, serão inicialmente dimensionados com a largura de 14 cm.

A edificação está inserida em zona urbana de uma cidade de região litorânea, de tal modo que será considerada a Classe de Agressividade Ambiental III. Em consequência, conforme a Tabela 3 e Tabela 4, o concreto deve ser no mínimo o C30 ( $f_{ck} = 30$  MPa), a relação  $a/c \leq 0,55$ , e o cobrimento de concreto de 4,0 cm para viga e pilar, com  $\Delta c = 10$  mm. Considerando que existirá fiscalização e controle adequado de qualidade durante a execução, será adotado  $\Delta c = 5$  mm, e assim o cobrimento de 3,5 cm. Outros dados adotados: aço CA-50, coeficientes de ponderação:  $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$ ,  $\gamma_s = 1,15$ , concreto com brita 1. Para a tensão de início de escoamento do aço será adotado o valor:  $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s = 50/1,15 = 43,5$  kN/cm<sup>2</sup>.

Será apresentado o dimensionamento apenas do lance compreendido entre o 1º pavimento e o 2º pavimento (ver Figura 151), dos pilares P1, P2, P5, P6 e P8. A carga normal característica ( $N_k$ ) aplicada na base dos lances dos pilares está indicada na Tabela 7.

*Tabela 7 – Carga normal (kN) característica nos pilares.*

<b>Pilar</b>	<b>P1</b>	<b>P5</b>	<b>P6</b>	<b>P8</b>
<b><math>N_k</math></b>	130	650	300	700

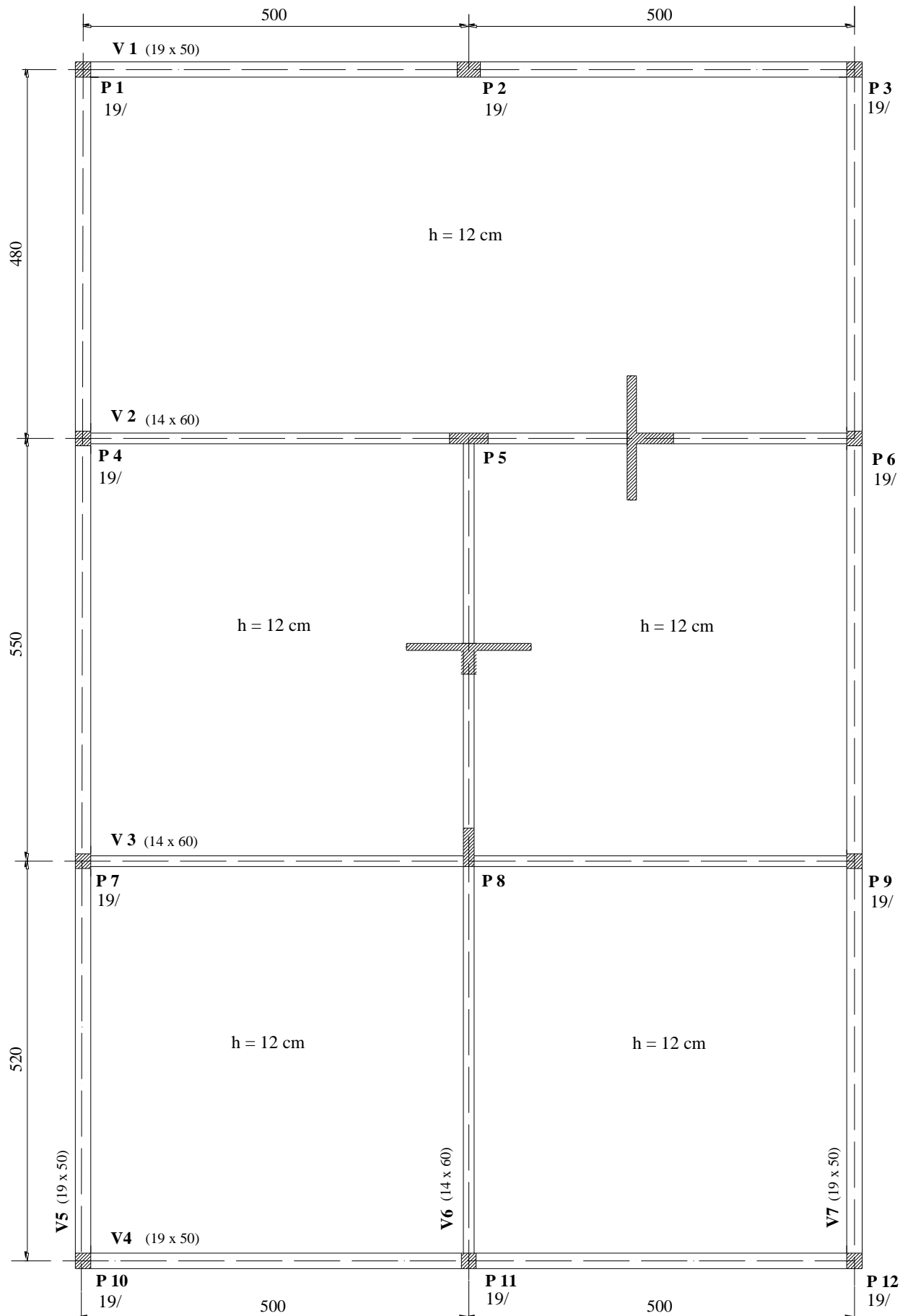


Figura 150 – Planta de fôrma do pavimento tipo do edifício.

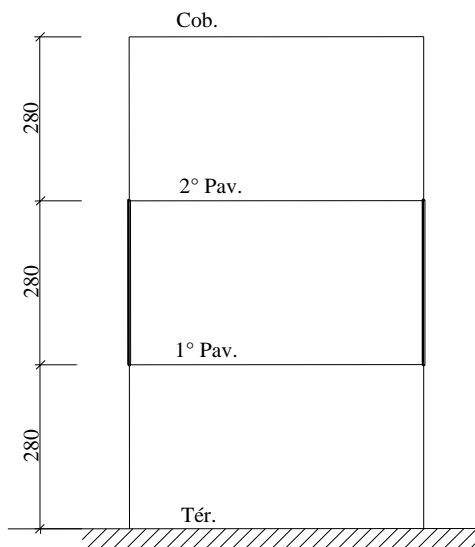


Figura 151 – Lance a ser dimensionado para os pilares.

A distância do centro da barra do canto até a face do pilar ( $d'$ , Figura 152) é:

$$d' = c + \phi_t + \phi_\ell/2$$

Para o cobrimento  $c = 3,5$  cm e adotando  $\phi_t = 5$  mm e  $\phi_\ell = 12,5$  mm, no cálculo dos pilares  $d'$  será considerado igual a:

$$d'_x = d'_y = 3,5 + 0,5 + 1,25/2 = 4,6 \text{ cm}$$

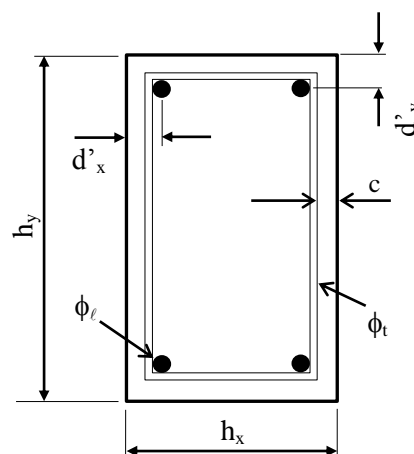


Figura 152 – Distância  $d'$ .

### 15.1 Pilar Intermediário P8

Dados:  $N_k = 700$  kN

$l_{ex} = l_{ey} = 280$  cm (comprimento equivalente nas direções x e y)

O pilar P8 é classificado como pilar intermediário porque as vigas V3 e V6 são contínuas sobre o pilar, não originando flexão importante que deva ser considerada no cálculo do pilar.

#### a) Força normal

A largura mínima de um pilar é 14 cm. Considerando que a largura do pilar seja de 14 cm, o coeficiente de majoração da carga ( $\gamma_n$ , Tabela 6) é 1,25. Segundo a NBR 6118, todas as ações atuantes no pilar devem ser majoradas por esse coeficiente. A força normal de cálculo é:

$$N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,25 \cdot 1,4 \cdot 700 = 1.225 \text{ kN}$$

Pré-dimensionamento (Eq. 113):

$$A_c = \frac{N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} = \frac{1.225}{0,5 \cdot 3,0 + 0,4} = 645 \text{ cm}^2 \geq 360 \text{ cm}^2$$

Pode-se adotar:  $A_c = 14 \times 50 = 700 \text{ cm}^2$  (Figura 153). Geralmente adota-se o comprimento de pilares retangulares com valores múltiplos de 5 cm. A área mínima de um pilar deve ser de  $360 \text{ cm}^2$ .

b) Índice de esbelteza<sup>89</sup> (Eq. 61)

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{14} = 69,2$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 69,2 \leq 90$$

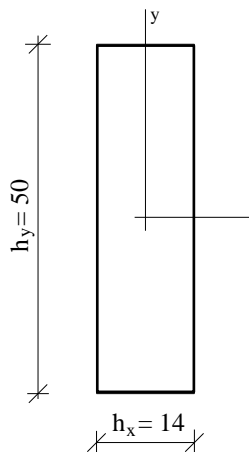


Figura 153 – Dimensões da seção transversal do pilar P8.

c) Momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo, em cada direção, é calculado pela Eq. 91:

$$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad , \text{ com } h \text{ em cm}$$

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\text{mín},x} = 1.225 (1,5 + 0,03 \cdot 14) = 2.352 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\text{mín},y} = 1.225 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.675 \text{ kN.cm}$$

momentos fletores que devem ser assumidos constantes ao longo da altura do lance do pilar (ver Figura 154).

d) Esbelteza limite (Eq. 81)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Nos pilares intermediários não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem em ambas as direções principais x e y, isto é,  $M_A = M_B = 0$  e  $e_1 = 0$ . Daí resulta que  $\alpha_b$  é igual a 1,0 e:

$$\lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 25 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 69,2 > \lambda_{1,x} \quad \rightarrow \quad \text{são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

$$\lambda_y = 19,4 < \lambda_{1,y} \quad \rightarrow \quad \text{não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.}$$

e) Momentos fletores totais e armadura segundo o método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,\text{tot}} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,\text{mín}}$$

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 77): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1.225}{700 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,82$$

Curvatura na **direção x** sujeita a momentos fletores de 2ª ordem (Eq. 76):

<sup>89</sup> A notação aplicada refere-se às direções x ou y do pilar, e não em torno de um eixo do pilar, e como trata-se de convenção, os resultados são idênticos caso a convenção seja alterada para “em torno de um eixo”.

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} = \frac{0,005}{14(0,82+0,5)} = 2,7056 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{h} = \frac{0,005}{14} = 3,57 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

Fazendo  $M_{1d,A} \geq M_{1d,\text{mín}}$  em cada direção, tem-se os momentos fletores totais máximos:

$$\text{Dir. x: } M_{d,\text{tot},x} = 1,0 \cdot 2352 + 1225 \frac{280^2}{10} 2,7056 \cdot 10^{-4} = 4.950 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\text{mín},y} = 3.675 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 154, a qual mostra que o máximo momento fletor solicitante, na **direção x** (de maior esbeltez) é a soma do momento fletor mínimo com o máximo momento fletor de segunda ordem. A armadura final do pilar resulta deste momento fletor.

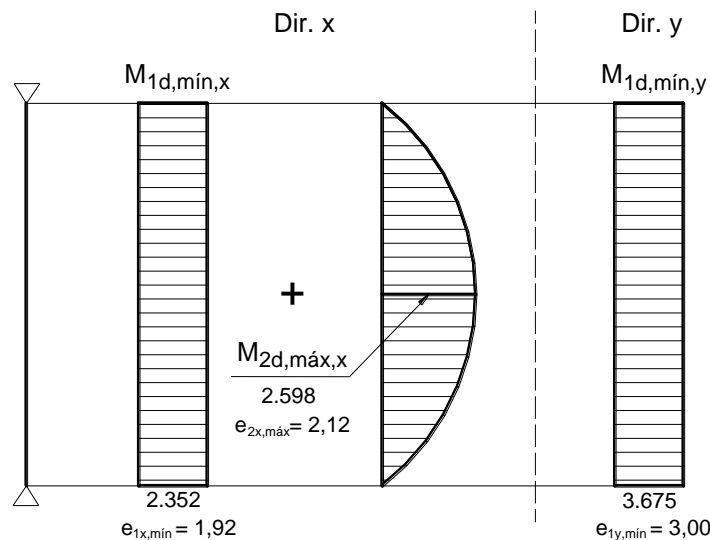


Figura 154 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

Com  $v = 0,82$  e utilizando os ábacos de Venturini (1987):

$$\mu = \frac{M_{d,\text{tot},x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4.950}{14 \cdot 700 \frac{3,0}{1,4}} = 0,24 \quad , \quad \frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,6}{14} = 0,33$$

não tem ábaco para o valor 0,33, de modo que será utilizado o ábaco A-5,<sup>90</sup> com relação 0,25, o que resulta  $\omega = 0,95$ . A armadura é:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,95 \cdot 700 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 32,76 \text{ cm}^2$$

#### f) Detalhamento

Armadura mínima (Eq. 107):

$$A_{s,\text{mín}} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \rightarrow \quad A_{s,\text{mín}} = 0,15 \frac{1225}{43,5} = 4,22 \text{ cm}^2$$

$$0,004 A_c = 0,004 \cdot 700 = 2,80 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad \therefore A_{s,\text{mín}} = 4,22 \text{ cm}^2 \text{ e } A_s = 32,76 \text{ cm}^2 \geq A_{s,\text{mín}}$$

<sup>90</sup> A utilização de um ábaco com relação  $d'/h$  menor que o valor calculado configura-se contra a segurança.

$$A_s = 32,76 \text{ cm}^2 \rightarrow 16 \phi 16 \text{ mm } (32,00 \text{ cm}^2) \text{ ou } 26 \phi 12,5 \text{ mm } (32,50 \text{ cm}^2)$$

A taxa de armadura resulta:

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{32,00}{700} 100 = 4,6 \% \rightarrow \rho_s = 4,6 \% < \rho_{\text{máx}} = 8 \%$$

Conforme a Eq. 108, a taxa máxima de armadura é 8 %. No entanto, considerando que as armaduras dos diferentes lances do pilar sejam iguais, a taxa máxima deve ser reduzida à metade, pois na região de emenda das barras a armadura será dobrada, o que leva então à taxa máxima de 4 % em cada lance. Portanto, a taxa de armadura do pilar, de 4,6 %, supera o valor de 4 %.

Entre diversas soluções para resolver o problema, uma é escalonar as emendas das barras em regiões diferentes ao longo da altura do pilar. No caso de se aumentar a seção transversal do pilar, o aumento do comprimento pouco ajuda a diminuir a armadura, pois neste caso a direção crítica do pilar é a direção relativa à largura, e não a do comprimento. O aumento da largura do pilar é que pode diminuir significativamente a armadura longitudinal.

A título de exemplo, a largura do pilar será aumentada em apenas 1 cm, de 14 para 15 cm, e a armadura será novamente dimensionada, a fim de ilustrar a grande diferença de resultados, embora com aumento de apenas 1 cm na largura do pilar. Os cálculos serão feitos apenas para a direção x, que é a crítica do pilar. Há que observar que o pilar ficará aparente na parede de alvenaria, a menos que se aumente a espessura dos revestimentos de argamassa das paredes adjacentes ao pilar.

a) *Esforços solicitantes e força normal para a nova seção transversal* ( $A_c = 15 \times 50 = 750 \text{ cm}^2$ )

$$\text{Com } \gamma_n = 1,20 \text{ na Tabela 6: } N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,20 \cdot 1,4 \cdot 700 = 1.176 \text{ kN}$$

b) *Índice de esbeltez* (Eq. 61)

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{\text{ex}}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{15} = 64,6$$

c) *Momento fletor mínimo* (Eq. 91)

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\text{min},x} = 1.176 (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 2.293 \text{ kN.cm}$$

d) *Esbeltez limite* (Eq. 81)

$$\lambda_{1,x} = 35 \text{ (sem alteração)}$$

$$\lambda_x = 64,6 > \lambda_{1,x} \rightarrow \text{s\~{a}o considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

e) *Momento fletor total e armadura segundo o método do pilar-padrão com curvatura aproximada*

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 77): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1.176}{750 \frac{3,0}{1,4}} = 0,73$$

Curvatura na **direção x**:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} = \frac{0,005}{15(0,73+0,5)} = 2,7100 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{15} = 3,3333 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,\text{tot},x} = 1,0 \cdot 2.293 + 1.176 \frac{280^2}{10} \cdot 2,7100 \cdot 10^{-4} = 4.791 \text{ kN.cm (Figura 155)}$$

A armadura resulta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4.791}{15 \cdot 750 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,20$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,6}{15} = 0,31 \cong 0,25$$

Ábaco A-5:  $\omega = 0,69$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,69 \cdot 750 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 25,49 \text{ cm}^2$$

$\geq A_{s,mín} \rightarrow \text{ok!}$

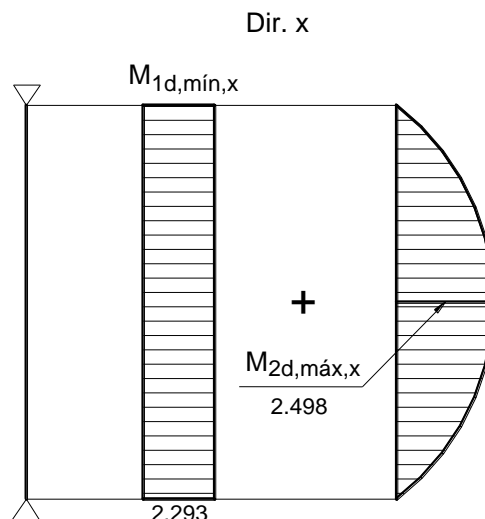


Figura 155 – Momentos fletores atuantes no pilar na direção x.

#### f) Detalhamento

$$A_s = 25,49 \text{ cm}^2 \rightarrow 20 \phi 12,5 \text{ mm } (25,00 \text{ cm}^2) \text{ ou } 14 \phi 16 (28,00 \text{ cm}^2)$$

A taxa de armadura, com 20  $\phi$  12,5, resulta:

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{25,00}{750} 100 = 3,3 \%$$

$$\rho_s = 3,3 \% < \rho = 4 \% \text{ (da região de emenda de barras)}$$

Portanto, o aumento de apenas 1 cm para a largura do pilar, de 14 para 15 cm, fez a taxa de armadura diminuir para um valor aceitável. A armadura diminuiu em 22 %, de 32,76 para 25,49 cm<sup>2</sup> (de 26  $\phi$  12,5 para 20  $\phi$  12,5 mm). Se a largura do pilar for de 16 cm, a armadura diminuiu em 41 %, para 19,31 cm<sup>2</sup> (16  $\phi$  12,5).

Com 20  $\phi$  12,5, o diâmetro do estribo ( $\phi_t$ ) e o espaçamento máximo dos estribos são (Eq. 109 e Eq. 110):

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 = 12,5 / 4 = 3,1 \text{ mm} \end{cases} \rightarrow \phi_t = 5 \text{ mm}$$

$$s_{máx} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b = 15 \text{ cm} \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1,25 = 15 \text{ cm} \end{cases} \rightarrow s_{máx} = 15 \text{ cm}$$

A distância entre os eixos de duas barras adjacentes é:

$$a_v = \frac{50 - [2(2,5 + 0,5) + 10 \cdot 1,25]}{9} + 1,25 = 4,7 \text{ cm}$$

O desenho do ábaco A-5 indica que o momento fletor resultante da força normal excêntrica é em torno do eixo x, e que as barras devem ser distribuídas, simetricamente, nas duas faces paralelas ao mesmo eixo. Ou, de outro modo, que as barras sejam alojadas nas faces perpendiculares à excentricidade (e) da força normal. No caso em questão do pilar P8, de acordo com essas análises, as barras devem ficar distribuídas ao longo das faces maiores do pilar, de comprimento 50 cm (Figura 156).

O canto do estribo protege contra a flambagem as barras (até 6) que estiverem dentro da distância  $20\phi_t$ . Existem quatro barras protegidas por cada canto, e as demais, pelo critério da NBR 6118, necessitam de grampos suplementares. Uma alternativa, que resulta na diminuição de dois grampos, é fazer dois estribos independentes. A solução melhor será aquela mais simples de executar e mais econômica.

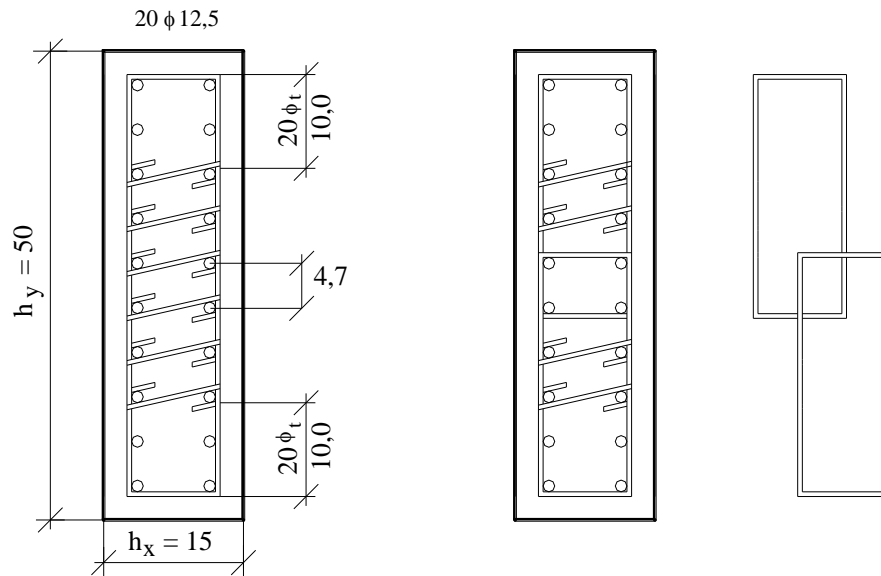


Figura 156 – Detalhamento da armadura na seção transversal do pilar P8.

## 15.2 Pilar de Extremidade P5

Dados:  $N_k = 650 \text{ kN}$

$l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$  (comprimento equivalente)

O pilar P5, embora seja um pilar interno à edificação, é classificado como **pilar de extremidade**, porque tem a viga V6 não contínua sobre ele, o que origina momento fletor de 1ª ordem na direção da largura do pilar (**dir. y** – ver Figura 150).

### a) Força normal

Tendo em vista o cálculo já feito do pilar P8, será adotada também a largura de 15 cm. O coeficiente de majoração da carga ( $\gamma_n$  - Tabela 6) é 1,20. A força normal de cálculo é:

$$N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,20 \cdot 1,4 \cdot 650 = 1.092 \text{ kN}$$

Para o pré-dimensionamento com a Eq. 114 não é necessário majorar a força normal com o coeficiente  $\gamma_n$ , apenas com o  $\gamma_f$  (1,4):

$$A_c = \frac{1,5N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} = \frac{1,5(1,4 \cdot 650)}{0,5 \cdot 3,0 + 0,4} = 718 \text{ cm}^2$$

$$\text{Pode-se adotar: } A_c = 15 \times 50 = 750 \text{ cm}^2$$

$$\geq 360 \text{ cm}^2 \text{ (Figura 157)}$$

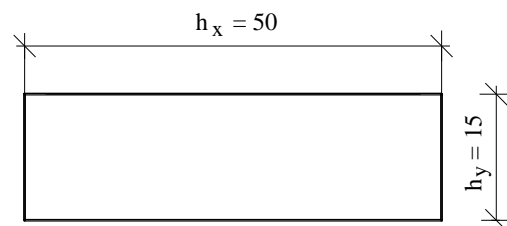


Figura 157 – Dimensões da seção transversal do pilar P5.

### b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 l_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 l_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{15} = 64,6 \quad (\text{pilar medianamente esbelto})$$

## c) Excentricidade de 1ª ordem

Existe excentricidade de 1ª ordem devido ao momento fletor ( $M_{yd}$ ) de ligação entre a viga V6 e o pilar P5, na **direção y**:

$$e_{1y} = \frac{M_{yd}}{N_d}$$

O momento fletor solicitante na base e no topo do pilar será avaliado com a Eq. 87 e Eq. 88, sendo:

$$M_{k,inf} = M_{k,sup} = M_{k,eng} \frac{r_{pilar}}{r_{p,sup} + r_{viga} + r_{p,inf}}$$

Supondo que a seção transversal do pilar não varia ao longo da sua altura, tem-se:

$$r_{pilar} = r_{p,sup} = r_{p,inf} = \frac{I_{pilar}}{\frac{\ell_{ey}}{2}} = \frac{50 \cdot 15^3}{\frac{280}{2}} = 100,4 \text{ cm}^3$$

Rigidez da viga V6 com seção transversal 14 x 60 cm e vão efetivo de 525 cm (entre os pilares P5 e P8):

$$I_{viga} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} = \frac{14 \cdot 60^3}{12} = 252.000 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow \quad r_{viga} = \frac{I_{viga}}{\ell_{ef}} = \frac{252.000}{525} = 480,0 \text{ cm}^3$$

Para o momento de engastamento perfeito da viga V6 no pilar P5 será adotada a carga total de 39 kN/m, conforme Figura 158.

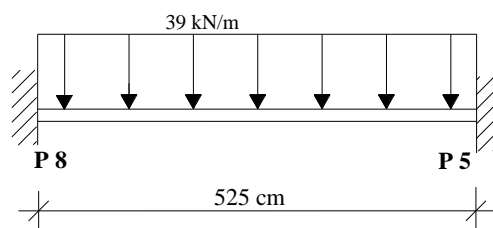


Figura 158 – Esquema estático e carregamento no vão da viga adjacente ao pilar P5.

O momento de engastamento perfeito no pilar P5 é:

$$M_{eng} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{39 \cdot 5,25^2}{12} = 89,58 \text{ kN.m} = 8.958 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores na base e no topo do lance do pilar resultam:

$$M_{k,inf} = M_{k,sup} = 8958 \frac{100,4}{100,4 + 480,0 + 100,4} = 1.321 \text{ kN.cm}$$

Considerando a propagação dos momentos fletores no pilar,<sup>91</sup> conforme mostrado na Figura 159, os momentos fletores totais, na base e no topo, são:

$$M_{k,topo} = -M_{k,base} = 1321 + \frac{1321}{2} = 1.982 \text{ kN.cm}$$

<sup>91</sup> Os momentos fletores de 1ª ordem atuantes nos pilares devem ser estudados com cuidado, pois a propagação pode ser diferente da indicada neste exemplo, ou pode não existir. Tome como exemplo o lance do pilar relativo ao pavimento térreo, ou o lance entre o 2º pavimento e a cobertura.

Transformando em momentos fletores de cálculo, com  $\gamma_f = 1,4$  e  $\gamma_n = 1,20$  (ver Tab. 4),<sup>92</sup> que deve ser considerado porque a largura do pilar é inferior a 19 cm:

$$M_{d,topo} = -M_{d,base} = 1,20 \cdot 1,4 \cdot 1982 = 3.330 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes na base e no topo do pilar estão indicados na Figura 159. A excentricidade de 1ª ordem na **direção y** é:

$$e_{1y} = \frac{3330}{1092} = 3,05 \text{ cm}$$

d) *Momento fletor mínimo*

$$M_{1d,mín} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad , \text{ com } h \text{ em cm}$$

$$\text{Dir. x: } M_{1d,mín,x} = 1092 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.276 \text{ kN.cm} \quad ; \quad e_{1x,mín} = 1,5 + 0,03 \cdot 50 = 3,00 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,mín,y} = 1092 (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 2.129 \text{ kN.cm} \quad ; \quad e_{1y,mín} = 1,5 + 0,03 \cdot 15 = 1,95 \text{ cm}$$

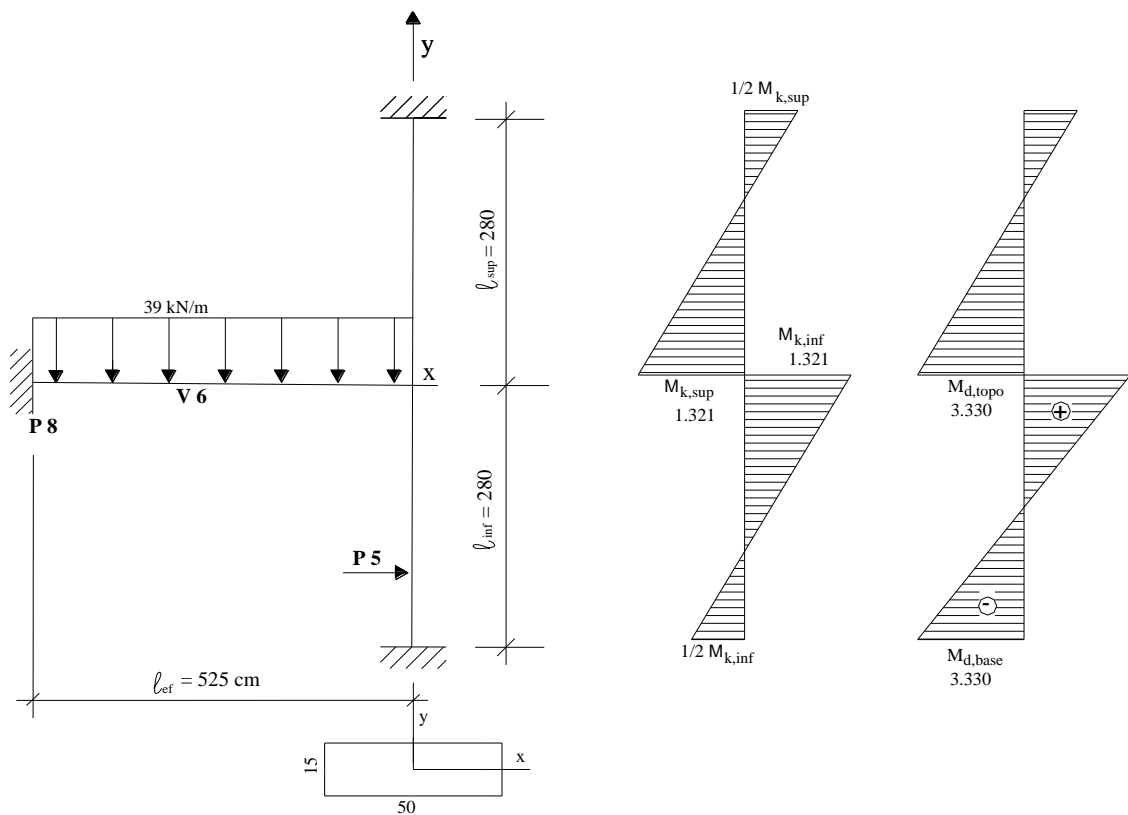


Figura 159 – Momentos fletores de 1ª ordem (kN.cm) no topo e na base do pilar P5 na direção y.

e) *Eslbeltez limite*

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, portanto,  $e_1 = 0$  e  $\alpha_b = 1,0$ , e:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{50}}{1,0} = 25 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

<sup>92</sup> Segundo a NBR 6118, os esforços solicitantes atuantes no pilar devem ser majorados por  $\gamma_n$ .

**Dir. y:** a excentricidade de 1ª ordem  $e_1$  é 3,05 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem são  $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 3.330$  kN.cm, maiores que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,mín,y} = 2.129$  kN.cm), o que leva ao cálculo de  $\alpha_b$ :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-3.330)}{3.330} = 0,2 \geq 0,4 \quad \rightarrow \quad \therefore \alpha_{b,y} = 0,4$$

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{3,05}{15}}{0,4} = 68,9 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,y} = 68,9$$

Desse modo:

$\lambda_x = 19,4 < \lambda_{1,x} = 35 \quad \rightarrow$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 64,6 < \lambda_{1,y} = 68,9 \quad \rightarrow$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

#### f) Momentos fletores totais e cálculo da armadura

Como não é necessário considerar a excentricidade de 2ª ordem, o momento fletor total é igual ao máximo momento fletor de 1ª ordem (ver Figura 160):

**Dir. x:**

$$M_{d,tot,x} = M_{1d,mín,x} = 3.276 \text{ kN.cm}$$

**Dir. y:**

$$M_{d,tot,y} = M_{1d,A,y} = 3.330 \text{ kN.cm}$$

$$\geq M_{1d,mín,y} = 2.129 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

A força normal adimensional é (Eq. 77):

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1.092}{750 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,68$$

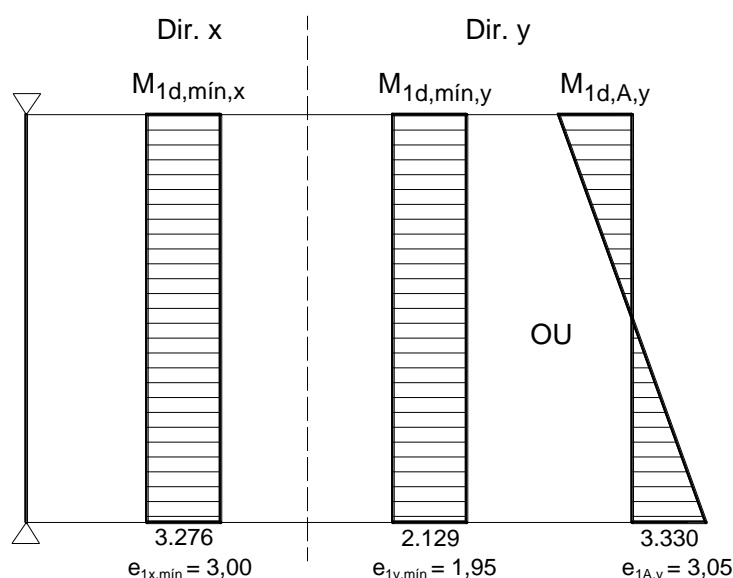


Figura 160 – Momentos fletores atuantes no pilar P5, nas direções x e y.

Com  $v = 0,68$  e utilizando-se os ábacos de Venturini (1987) para a *Flexão Reta*, considerando apenas a **direção y**:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3.330}{15 \cdot 750 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,14 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,68 \frac{3,05}{15} = 0,14$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,6}{15} = 0,31 \cong 0,25 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-5: } \omega = 0,38$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,38 \cdot 750 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 14,04 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad 12 \phi 12,5 \text{ mm (15,00 cm}^2)$$

#### g) Detalhamento

Armadura mínima (Eq. 58):

$$A_{s,\min} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \rightarrow \quad A_{s,\min} = 0,15 \frac{1092}{43,5} = 3,77 \text{ cm}^2 \geq 0,004 \cdot 750 = 3,00 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 14,04 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 3,77 \text{ cm}^2$$

A taxa de armadura resulta:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{15,00}{750} 100 = 2,0 \% < \rho_{\max} = 4 \% \quad \rightarrow \text{ok!}$$

O diâmetro ( $\phi$ ) e espaçamento máximo dos estribos são (Eq. 109 e Eq. 110):

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 = 12,5 / 4 = 3,1 \text{ mm} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \phi_t = 5 \text{ mm}$$

$$s_{\max} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b = 15 \text{ cm} \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1,25 = 15 \text{ cm} \end{cases} \quad \rightarrow \quad s_{\max} = 15 \text{ cm}$$

A distância entre os eixos das barras adjacentes é:

$$a_h = \frac{50 - [2(2,5 + 0,5) + 6 \cdot 1,25]}{5} + 1,25 = 8,6 \text{ cm}$$

O canto do estribo protege contra a flambagem as barras (até 6) que estiverem dentro da distância  $20 \phi_t$ . Existem quatro barras protegidas por cada canto, de modo que as demais, pelo critério da NBR 6118, necessitam grampos suplementares (Figura 161). Uma alternativa, que resulta na eliminação dos grampos, é fazer dois estribos independentes. A solução melhor será aquela mais simples de executar e também mais econômica.

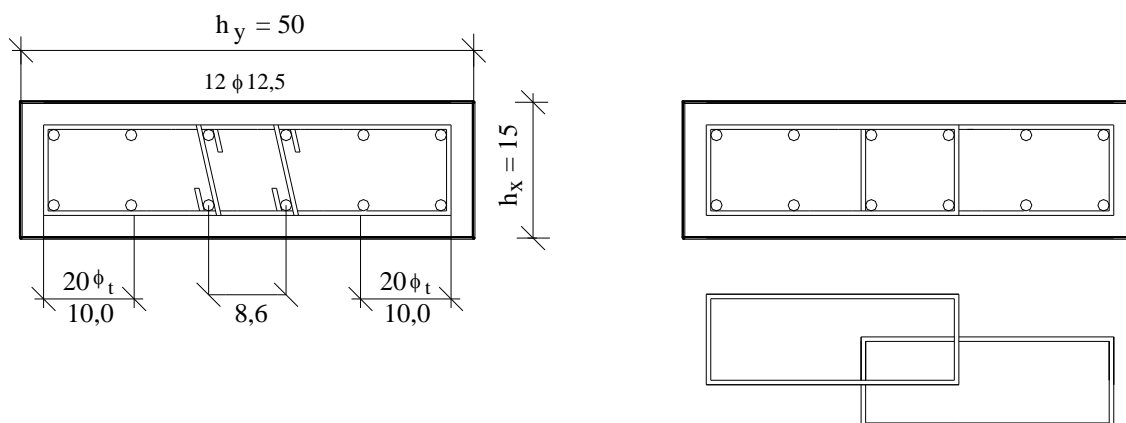


Figura 161 – Detalhamento da armadura na seção transversal do pilar P5.

### 15.3 Pilar de Extremidade P6

Dados:  $N_k = 300 \text{ kN}$

$l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$

a) Força normal

O pilar P6 está na periferia da edificação e tem largura de 19 cm. O coeficiente de majoração da carga ( $\gamma_n$  - Tabela 6) não necessita ser considerado, pois é considerado apenas para larguras entre 14 e 18 cm. A força normal de cálculo é:

$$N_d = \gamma_f \cdot N_k = 1,4 \cdot 300 = 420 \text{ kN}$$

Pré-dimensionamento (Eq. 114):

$$A_c = \frac{1,5N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} = \frac{1,5 \cdot 420}{0,5 \cdot 3,0 + 0,4} = 332 \text{ cm}^2$$

A área mínima de um pilar deve ser de 360 cm<sup>2</sup>, de modo que pode-se adotar um pilar quadrado:  $A_c = 19 \times 19 = 361 \text{ cm}^2$  (Figura 162).

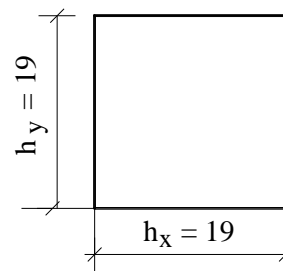


Figura 162 – Dimensões (cm) da seção transversal do pilar P6.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{3,46 \ell_e}{h} = \frac{3,46 \cdot 280}{19} = 51,0$$

c) Excentricidade de 1ª ordem

Existe excentricidade de 1ª ordem devido ao momento fletor ( $M_{xd}$ ) de ligação entre a viga V2 e o pilar P6, na **direção x**:

$$e_{1x} = \frac{M_{xd}}{N_d}$$

O momento fletor solicitante na base e no topo do pilar será avaliado pelas Eq. 38 e 39, sendo:

$$M_{k,inf} = M_{k,sup} = M_{k,eng} \frac{r_{pilar}}{r_{p,sup} + r_{viga} + r_{p,inf}}$$

Supondo que a seção transversal do pilar não varia ao longo da sua altura, tem-se a rigidez:

$$r_{pilar} = r_{p,sup} = r_{p,inf} = \frac{I_{pilar}}{\frac{\ell_{ex}}{2}} = \frac{19 \cdot 19^3}{\frac{12}{2}} = 77,6 \text{ cm}^3$$

A rigidez da viga V2, com seção transversal 14 x 60 cm e vão efetivo de 493 cm, é:

$$I_{viga} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} = \frac{14 \cdot 60^3}{12} = 252.000 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow \quad r_{viga} = \frac{I_{viga}}{\ell_{ef}} = \frac{252.000}{493} = 511,2 \text{ cm}^3$$

Para o momento de engastamento perfeito da viga V2 no pilar P6 será adotada a carga total de 32 kN/m, conforme Figura 163.

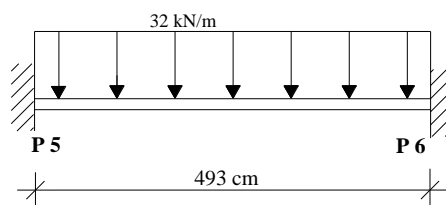


Figura 163 – Esquema estático e carregamento no vão da viga adjacente ao pilar P6.

O momento de engastamento perfeito no pilar P6 é:

$$M_{eng} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{32 \cdot 4,93^2}{12} = 64,81 \text{ kN.m} = 6.481 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores na base e no topo do lance do pilar resultam:

$$M_{k,inf} = M_{k,sup} = 6481 \frac{77,6}{77,6 + 511,2 + 77,6} = 755 \text{ kN.cm}$$

Considerando a propagação dos momentos fletores no pilar, conforme mostrado na Figura 164, os momentos fletores de cálculo (com  $\gamma_f = 1,4$ ), na base e no topo, são (Figura 164):

$$M_{d,topo} = -M_{d,base} = 1,4 \left( 755 + \frac{755}{2} \right) = 1.586 \text{ kN.cm}$$

A excentricidade de 1ª ordem na **direção x** é:  $e_{1x} = \frac{1586}{420} = 3,78 \text{ cm}$

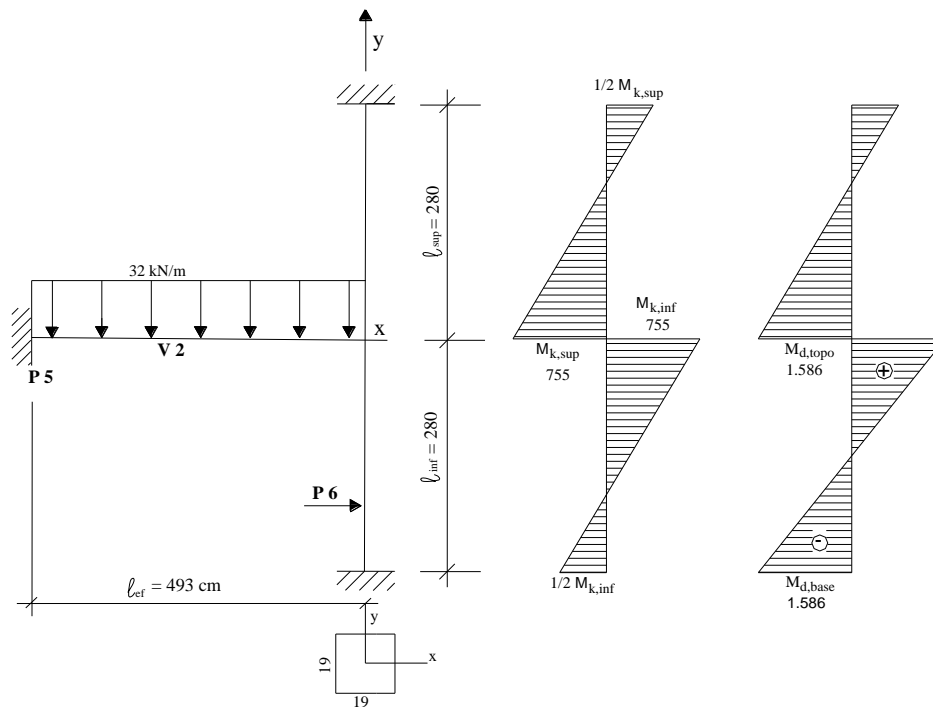


Figura 164 – Momentos fletores de 1ª ordem (kN.cm) no topo e na base do pilar P6 na direção x.

d) Momento fletor mínimo

$$M_{1d,mín} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad , \text{ com } h \text{ em cm}$$

**Dir. x e y:**  $M_{1d,mín,x} = M_{1d,mín,y} = 420 (1,5 + 0,03 \cdot 19) = 869,4 \text{ kN.cm}$

e) Esbelteza limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** a excentricidade de 1ª ordem  $e_1$  é 3,78 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem são  $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 1.586 \text{ kN.cm}$ , maiores que o momento fletor mínimo (869,4 kN.cm), o que leva ao cálculo de  $\alpha_b$ :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-1.586)}{1.586} = 0,2 \geq 0,4 \quad \rightarrow \quad \therefore \alpha_{b,x} = 0,4$$

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{3,78}{19}}{0,4} = 68,7 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = 68,7$$

**Dir. y:** não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, portanto,  $e_1 = 0$  e  $\alpha_b = 1,0$ , e:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{19}}{1,0} = 25 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 51,0 < \lambda_{1,x} = 68,7 \rightarrow$  **não são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 51,0 > \lambda_{1,y} = 35 \rightarrow$  **são** considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

f) *Momentos fletores totais pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada*

O momento fletor total é:

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\rho_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad , \text{ com } \alpha_b M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$$

$$\text{Força normal adimensional: } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{420}{361 \frac{3,0}{1,4}} = 0,54$$

Curvatura na **direção y** sujeita a momentos fletores de 2ª ordem:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{19(0,54+0,5)} = 2,5304 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{19} = 2,63 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

Fazendo  $M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$  em cada direção, tem-se o momento fletor total máximo:

**Dir. x:**  $M_{d,tot,x} = 1.586 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 869,4 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ ok!}$  (ver Figura 165)

**Dir. y:**

$$M_{d,tot,y} = 1,0 \cdot 869,4 + 420 \frac{280^2}{10} 2,5304 \cdot 10^{-4} = 1.702,6 \text{ kN.cm}$$

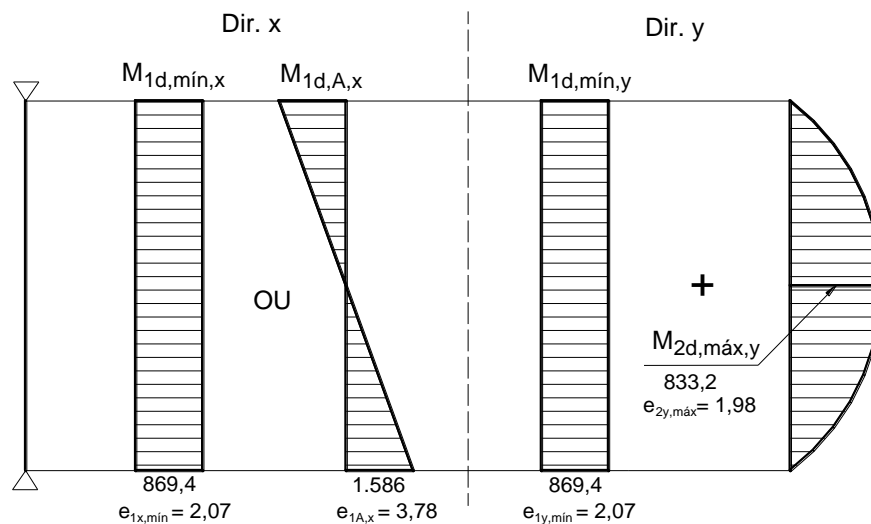


Figura 165 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

Com  $v = 0,54$  e utilizando-se os ábacos de Venturini (1987) para *Flexão Reta*:

**Dir. x:**

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1.586}{19 \cdot 361 \frac{3,0}{1,4}} = 0,11$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,6}{19} = 0,24 \cong 0,25 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-9: } \omega = 0,09$$

**Dir. y:**

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1702,6}{19 \cdot 361 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,12$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,6}{19} = 0,24 \cong 0,25 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-5: } \omega = 0,13^{93}$$

A armadura resulta do maior valor de  $\omega$ :

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,13 \cdot 361 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 2,31 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad 4 \phi 10 \text{ mm (3,20 cm}^2) \quad (\text{ver Figura 166})$$

g) *Detalhamento*

Armadura mínima (Eq. 58):

$$A_{s,mín} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \rightarrow \quad A_{s,mín} = 0,15 \frac{420}{43,5} = 1,45 \geq 0,004 \cdot 361 = 1,44 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 2,31 \text{ cm}^2 > A_{s,mín} = 1,45 \text{ cm}^2$$

O diâmetro mínimo da barra longitudinal dos pilares deve ser de 10 mm (Eq. 104). A taxa de armadura resulta:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{3,20}{361} 100 = 0,89 \% < \rho_{máx} = 4 \%$$

O diâmetro ( $\phi_t$ ) e espaçamento máximo dos estribos (Eq. 109 e Eq. 110) são:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 = 10 / 4 = 2,5 \text{ mm} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \phi_t = 5 \text{ mm}$$

$$s_{máx} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b = 19 \text{ cm} \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1,0 = 12 \text{ cm} \end{cases} \quad \rightarrow \quad s_{máx} = 12 \text{ cm}$$

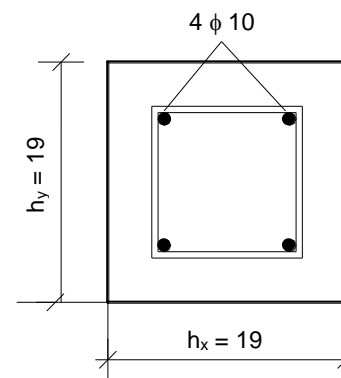


Figura 166 – Detalhamento da armadura na seção transversal do pilar P6.

## 15.4 Pilar de Canto P1

Dados:  $N_k = 130 \text{ kN}$

$l_{ex} = l_{ey} = 280 \text{ cm}$

a) *Força normal*

<sup>93</sup> O detalhamento da armadura do ábaco A-9 não se compara exatamente ao detalhamento do ábaco A-5, mas neste caso há dificuldade porque faltam ábacos com  $d'/h = 0,25$  na publicação de Venturini. Por outro lado, as diferenças nos detalhamentos não são significativas, e o mais importante é que os posicionamentos das armaduras no pilar foram mantidos para ambos os ábacos. Outra questão é que o ábaco A-9 tem  $d'/h = 0,20$ , um valor muito próximo de 0,24, mas pelo valor menor resulta em uma armadura um pouco inferior. Como a armadura do pilar resulta a mínima, essa análise tem importância reduzida.

O pilar P1 está na periferia da edificação e tem largura de 19 cm. E conforme a Tabela 6, o coeficiente de majoração da carga ( $\gamma_n$ ) é 1,0, de modo que a força normal de cálculo é:

$$N_d = \gamma_f \cdot N_k = 1,4 \cdot 130 = 182 \text{ kN}$$

Pré-dimensionamento (Eq. 114):

$$A_c = \frac{1,5N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} = \frac{1,5 \cdot 182}{0,5 \cdot 3,0 + 0,4} = 144 \text{ cm}^2$$

A área mínima de um pilar deve ser de  $360 \text{ cm}^2$ , e neste caso pode-se adotar um pilar quadrado  $19 \times 19$  ( $361 \text{ cm}^2$ ). No entanto, para melhor exemplificar os cálculos necessários em um pilar de canto, a seção será adotada com comprimentos diferentes para os lados, retangular  $19 \times 25$  ( $475 \text{ cm}^2$ ), Figura 167.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{25} = 38,9$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{19} = 51,0$$

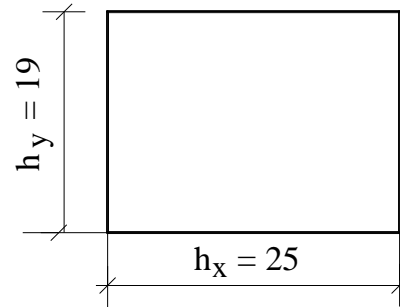


Figura 167 – Dimensões (cm) da seção transversal do pilar P1.

c) Excentricidades de 1ª ordem

**Dir. x:** existe o momento fletor ( $M_{xd}$ ) de ligação entre a viga V1 e o pilar P1, e a excentricidade:

$$e_{1x} = \frac{M_{xd}}{N_d}$$

O momento fletor solicitante na base e no topo do pilar é avaliado com a Eq. 87 e Eq. 88, sendo:

$$M_{k,inf} = M_{k,sup} = M_{k,eng} \frac{r_{pilar}}{r_{p,sup} + r_{viga} + r_{p,inf}}$$

Supondo que a seção transversal do pilar não varia ao longo da sua altura, tem-se:

$$r_{pilar} = r_{p,sup} = r_{p,inf} = \frac{I_{pilar}}{\frac{\ell_{ex}}{2}} = \frac{19 \cdot 25^3}{\frac{280}{2}} = 176,7 \text{ cm}^3$$

Rigidez da viga V1, com seção transversal  $19 \times 50 \text{ cm}$  e vão efetivo de 497 cm:

$$I_{viga} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} = \frac{19 \cdot 50^3}{12} = 197.917 \text{ cm}^4 \quad r_{viga} = \frac{I_{viga}}{\ell_{ef}} = \frac{197917}{497} = 398,2 \text{ cm}^3$$

Para o momento de engastamento perfeito da viga V1 no pilar P1 será adotada a carga total de 25 kN/m, conforme Figura 168.

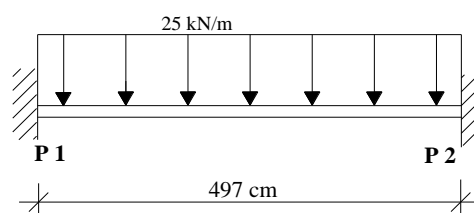


Figura 168 – Esquema estático e carregamento no vão da viga adjacente ao pilar P1.

O momento de engastamento perfeito no pilar P1 é:

$$M_{\text{eng}} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{25 \cdot 4,97^2}{12} = 51,46 \text{ kN.m} = 5.146 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores na base e no topo do lance do pilar resultam:

$$M_{k,\text{inf}} = M_{k,\text{sup}} = 5146 \frac{176,7}{176,7 + 398,2 + 176,7} = 1.210 \text{ kN.cm}$$

Considerando a propagação dos momentos fletores nos lances do pilar, os momentos fletores de cálculo (com  $\gamma_f = 1,4$ ), na base e no topo, são:

$$M_{d,\text{topo}} = -M_{d,\text{base}} = 1,4 \left( 1.210 + \frac{1.210}{2} \right) = 2.541 \text{ kN.cm}$$

que é o momento fletor  $M_{xd}$ , de modo que a excentricidade de 1ª ordem na **dir. x** é:

$$e_{1x} = \frac{M_{xd}}{N_d} = \frac{2.541}{182} = 13,96 \text{ cm}$$

**Dir. y:** existe o momento fletor ( $M_{yd}$ ) de ligação entre a viga V5 e o pilar P1, e a excentricidade de 1ª ordem:

$$e_{1y} = \frac{M_{yd}}{N_d}$$

Supondo que a seção transversal do pilar não varia ao longo da sua altura, tem-se:

$$r_{\text{pilar}} = r_{p,\text{sup}} = r_{p,\text{inf}} = \frac{I_{\text{pilar}}}{\frac{\ell_{ey}}{2}} = \frac{25 \cdot 19^3}{\frac{12}{280}} = 1021 \text{ cm}^3$$

Rigidez da viga V5, com seção transversal 19 x 50 cm e vão efetivo de 480 cm:

$$I_{\text{viga}} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} = \frac{19 \cdot 50^3}{12} = 197.917 \text{ cm}^4 \quad r_{\text{viga}} = \frac{I_{\text{viga}}}{\ell_{ef}} = \frac{197917}{480} = 412,3 \text{ cm}^3$$

Para o momento de engastamento perfeito da viga V5 no pilar P1 será adotada a carga total de 18 kN/m, conforme Figura 169.

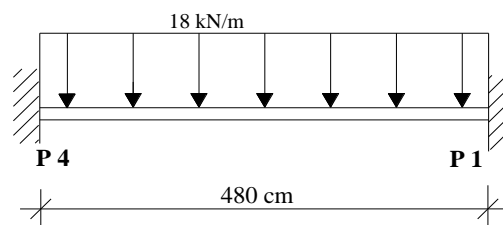


Figura 169 – Esquema estático e carregamento no vão da viga adjacente ao pilar P1.

$$M_{\text{eng}} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{18 \cdot 4,8^2}{12} = 34,56 \text{ kN.m} = 3.456 \text{ kN.cm}$$

$$M_{k,\text{inf}} = M_{k,\text{sup}} = 3456 \frac{1021}{1021 + 412,3 + 1021} = 572,4 \text{ kN.cm}$$

Considerando a propagação dos momentos fletores no pilar, os momentos fletores de cálculo (com  $\gamma_f = 1,4$ ), na base e no topo, são:

$$M_{d,\text{topo}} = -M_{d,\text{base}} = 1,4 \left( 572,4 + \frac{572,4}{2} \right) = 1.202 \text{ kN.cm}$$

que é o momento fletor  $M_{yd}$ , de modo que a excentricidade de 1ª ordem na **dir. y** é:

$$e_{iy} = \frac{M_{yd}}{N_d} = \frac{1.202}{182} = 6,60 \text{ cm}$$

Os momentos fletores de 1ª ordem, nas direções x e y, estão mostrados na Figura 170.

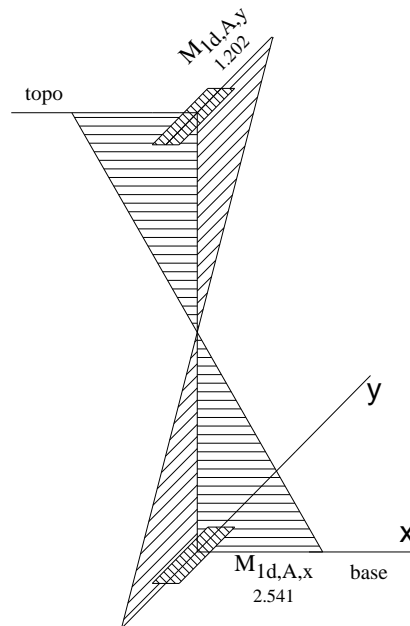


Figura 170 – Momentos fletores de 1ª ordem (kN.cm) atuantes no pilar P1.

d) Momento fletor mínimo

$$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad , \text{ com } h \text{ em cm}$$

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\text{mín},x} = 182 (1,5 + 0,03 \cdot 25) = 409,5 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\text{mín},y} = 182 (1,5 + 0,03 \cdot 19) = 376,7 \text{ kN.cm}$$

e) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

**Dir. x:** a excentricidade de 1ª ordem  $e_1$  é 13,96 cm e os momentos fletores de 1ª ordem são  $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.541 \text{ kN.cm}$ , maiores que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,\text{mín},x} = 409,5 \text{ kN.cm}$ ), o que leva ao cálculo de  $\alpha_b$ :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-2541)}{2541} = 0,2 \geq 0,4 \quad \rightarrow \therefore \alpha_{b,x} = 0,4$$

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{13,96}{25}}{0,4} = 80,0 \geq 35 \quad \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 80,0$$

**Dir. y:** a excentricidade de 1ª ordem  $e_1$  é 6,60 cm e os momentos fletores de 1ª ordem são  $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.202$  kN.cm, maiores que o momento fletor mínimo ( $M_{1d,mín,y} = 376,7$  kN.cm), o que leva ao cálculo de  $\alpha_b$ :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-1202)}{1202} = 0,2 \geq 0,4 \quad \rightarrow \therefore \alpha_{b,y} = 0,4$$

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{6,60}{19}}{0,4} = 73,4 \geq 35 \quad \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 73,4$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 38,9 < \lambda_{1,x} = 80,0 \quad \rightarrow \text{não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

$$\lambda_y = 51,0 < \lambda_{1,y} = 73,4 \quad \rightarrow \text{não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.}$$

#### f) Momentos fletores totais e cálculo da armadura

Como não existem excentricidades de 2ª ordem os momentos fletores totais são iguais aos máximos momentos fletores de 1ª ordem, como indicados na Figura 171:

$$\text{Dir. x: } M_{d,tot,x} = M_{1d,A,x} = 2.541 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 409,5 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow \text{ok!}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,tot,y} = M_{1d,A,y} = 1.202 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 376,7 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow \text{ok!}$$

$$\text{A força normal adimensional é (Eq. 77): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{182}{475 \frac{3,0}{1,4}} = 0,18$$

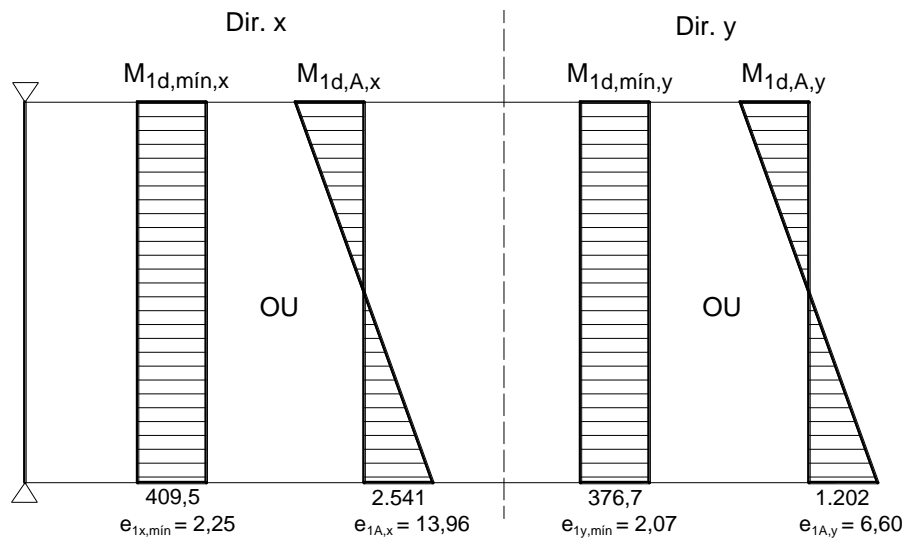


Figura 171 – Momentos fletores (kN.cm) atuantes no pilar P1, nas direções x e y.

Coefficientes adimensionais de flexão considerando a *Flexão Composta Oblíqua* (Eq. 51 e 52):

$$\mu_x = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2.541}{25 \cdot 475 \frac{3,0}{1,4}} = 0,10 \quad \text{e} \quad \mu_y = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1.202}{19 \cdot 475 \frac{3,0}{1,4}} = 0,06$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,6}{25} = 0,18 \quad \text{e} \quad \frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,6}{19} = 0,24 \cong 0,25$$

Observa-se na publicação de Pinheiro (2009) para *Flexão Composta Oblíqua* que não existe um ábaco que atenda as relações calculadas para  $d'/h$ . No entanto, considerando o valor 0,18 como aproximadamente

0,15, pode-se escolher o ábaco 10A.<sup>94</sup> Fica  $d'_x/h_x = 0,15$  e  $d'_y/h_y = 0,25$ . Porém, é necessário trocar as notações, para adequação ao ábaco 10A (Figura 172), e neste caso a armadura também deve ser girada em  $90^\circ$ , tal que:<sup>95</sup>

$$d'_x/h_x = 0,25 \quad ; \quad d'_y/h_y = 0,15 \quad , e$$

$$\mu_x = 0,06 \quad ; \quad \mu_y = 0,10$$

Com  $v = 0,18$  e interpolando entre  $v = 0,0$  e  $v = 0,2$ , a taxa de armadura resulta:

- para  $v = 0,0$        $\rightarrow$        $\omega = 0,30$
- para  $v = 0,2$        $\rightarrow$        $\omega = 0,18$
- para  $v = 0,18$      $\rightarrow$        $\omega = 0,19$

A armadura resulta:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,19 \cdot 475 \cdot 3,0}{43,5} = 4,45 \text{ cm}^2$$

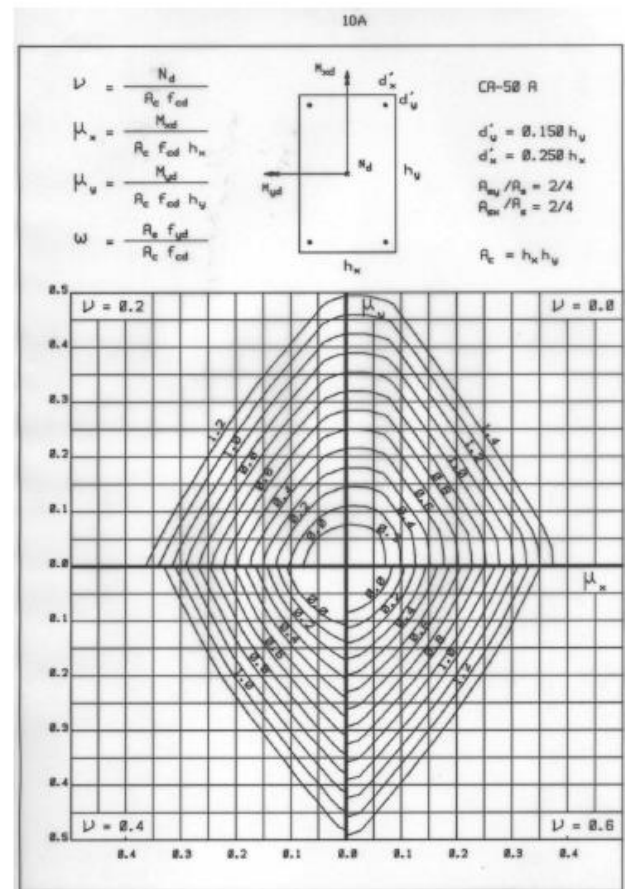


Figura 172 – Ábaco 10A de Pinheiro (2009) para Flexão Composta Oblíqua.

#### g) Detalhamento

Armadura mínima (Eq. 58):

$$A_{s,\text{mín}} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \rightarrow \quad A_{s,\text{mín}} = 0,15 \frac{182}{43,5} = 0,63 \text{ cm}^2 \geq 0,004 \cdot 475 = 1,90 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 4,45 \text{ cm}^2 > A_{s,\text{mín}} = 1,90 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad 4 \phi 125 \text{ mm } (5,00 \text{ cm}^2) \quad , \text{ ver Figura 173.}$$

A taxa de armadura  $\rho$  resulta:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{5,00}{475} 100 = 1,05 \% < \rho_{\text{máx}} = 4 \% \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

<sup>94</sup> Utilizar um ábaco com relação  $d'/h$  menor implica calcular uma armadura um pouco menor que a necessária.

<sup>95</sup> No caso de ábaco com 4 barras nos vértices da seção o giro da armadura não modifica o arranjo das barras.

O diâmetro ( $\phi_t$ ) e espaçamento máximo dos estribos (Eq. 109 e Eq. 110) são:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 = 12,5 / 4 = 3,1 \text{ mm} \end{cases} \rightarrow \phi_t = 5 \text{ mm}$$

$$s_{\text{máx}} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b = 19 \text{ cm} \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1,25 = 15 \text{ cm} \end{cases} \rightarrow s_{\text{máx}} = 15 \text{ cm}$$

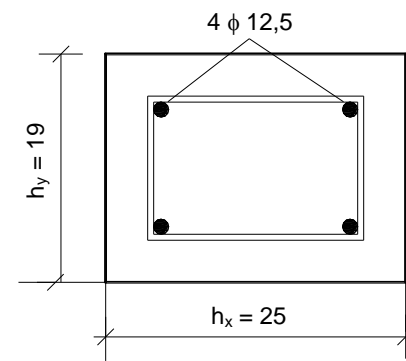


Figura 173 – Detalhamento da armadura na seção transversal do pilar P1.

## REFERÊNCIAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building code requirements for structural concrete*, ACI 318 R-95. Farmington Hills, 1995, 369p.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-11) and Commentary*. Reported by ACI Committee 318, 2011, 503p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2014, 238p.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB-FIP Model Code 1990: final draft*. Bulletin D'Information, n.203, 204 e 205, jul., 1991.

COMITÉ EUROPEO DE NORMALIZACIÓN. *Proyecto de Estructuras de Hormigon. Parte 1: Reglas Generales y Reglas para Edificación*. Eurocódigo 2, ENV-1992/1, febrero 1992

FUSCO, P.B. *Estruturas de concreto - Solicitações normais*. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois, 1981, 464p.

NAWY, E.G. *Reinforced concrete – A fundamental approach*. Englewood Cliffs, Ed. Prentice Hall, 2005, 5a. ed., 824p.

PINHEIRO, L.M. ; BARALDI, L.T. ; POREM, M.E. *Estruturas de Concreto: Ábacos para Flexão Oblíqua*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, USP, 2009, 108p. Disponível em (23/08/21): <http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Abacos Flexao Obligua Pinheiro>

PINHEIRO, L.M. *Flexão Composta e Instabilidade. Notas de Aula*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1994.

SANTOS, L.M. *Cálculo de Concreto Armado*, v.1, São Paulo, Ed. LMS, 1983, 541p.

SÜSSEKIND, J.C. *Curso de concreto*, v. 2, 4ª ed., Porto Alegre, Ed. Globo, 1984, 280p.

VENTURINI, W.S. ; RODRIGUES, R.O. *Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, USP, 1987, 133p. Disponível em (23/08/21): <http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Abacos Flexao Normal Venturini>

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318-14: *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, ACI committee 318, 2014, 520p. 26.

CARVALHO, R.C. ; PINHEIRO, L.M. *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*, v. 2. São Paulo, Ed. Pini, 2009, 589p.

COMITÉ EUROPEO DE NORMALIZACIÓN. *Eurocode 2 – Design of concrete structures*, Part 1-1, Part 1-2. 2005.

FUSCO, P.B. *Técnica de armar as estruturas de concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2000, 382p.

SANTOS, L.M. *Cálculo de concreto armado: segundo a nova NB-1 e o CEB*. São Paulo, Ed. LMS, 2ª ed., v.1-2, 1983.



## TABELAS ANEXAS

Tabela A-1 – Valores de  $K_c$  e  $K_s$  para o aço CA-50 (para concretos do Grupo I de resistência –  $f_{ck} \leq 50$  MPa,  $\gamma_c = 1,4$ ,  $\gamma_s = 1,15$ ).

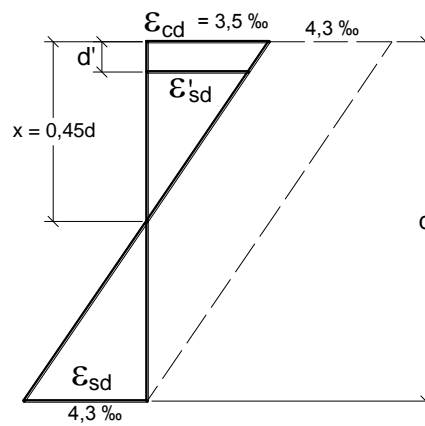
FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES										Dom.
$\beta_x = \frac{x}{d}$	$K_c$ (cm <sup>2</sup> /kN)								$K_s$ (cm <sup>2</sup> /kN)	
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-50	
0,01	137,8	103,4	82,7	68,9	59,1	51,7	45,9	41,3	0,023	2
0,02	69,2	51,9	41,5	34,6	29,6	25,9	23,1	20,8	0,023	
0,03	46,3	34,7	27,8	23,2	19,8	17,4	15,4	13,9	0,023	
0,04	34,9	26,2	20,9	17,4	14,9	13,1	11,6	10,5	0,023	
0,05	28,0	21,0	16,8	14,0	12,0	10,5	9,3	8,4	0,023	
0,06	23,4	17,6	14,1	11,7	10,0	8,8	7,8	7,0	0,024	
0,07	20,2	15,1	12,1	10,1	8,6	7,6	6,7	6,1	0,024	
0,08	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,6	5,9	5,3	0,024	
0,09	15,8	11,9	9,5	7,9	6,8	5,9	5,3	4,7	0,024	
0,10	14,3	10,7	8,6	7,1	6,1	5,4	4,8	4,3	0,024	
0,11	13,1	9,8	7,8	6,5	5,6	4,9	4,4	3,9	0,024	
0,12	12,0	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	4,0	3,6	0,024	
0,13	11,1	8,4	6,7	5,6	4,8	4,2	3,7	3,3	0,024	
0,14	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,024	
0,15	9,7	7,3	5,8	4,9	4,2	3,7	3,2	2,9	0,024	
0,16	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,7	0,025	
0,17	8,7	6,5	5,2	4,3	3,7	3,2	2,9	2,6	0,025	
0,18	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,025	
0,19	7,8	5,9	4,7	3,9	3,4	2,9	2,6	2,3	0,025	
0,20	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,025	
0,21	7,1	5,4	4,3	3,6	3,1	2,7	2,4	2,1	0,025	
0,22	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,025	
0,23	6,6	4,9	3,9	3,3	2,8	2,5	2,2	2,0	0,025	
0,24	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,025	
0,25	6,1	4,6	3,7	3,1	2,6	2,3	2,0	1,8	0,026	
0,26	5,9	4,4	3,5	2,9	2,5	2,2	2,0	1,8	0,026	
0,27	5,7	4,3	3,4	2,8	2,4	2,1	1,9	1,7	0,026	
0,28	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,026	
0,29	5,4	4,0	3,2	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6	0,026	
0,30	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	1,9	1,7	1,6	0,026	
0,31	5,1	3,8	3,0	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	0,026	
0,32	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,026	
0,33	4,8	3,6	2,9	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	0,026	
0,34	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,027	
0,35	4,6	3,4	2,7	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4	0,027	
0,36	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,027	
0,37	4,4	3,3	2,6	2,2	1,9	1,6	1,5	1,3	0,027	
0,38	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,027	
0,40	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,027	
0,42	3,9	2,9	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,028	
0,44	3,8	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,028	
0,45	3,7	2,8	2,2	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,028	
0,46	3,7	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	0,028	
0,48	3,5	2,7	2,1	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	0,028	
0,50	3,4	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0	0,029	
0,52	3,3	2,5	2,0	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,029	
0,54	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,029	
0,56	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,9	0,030	
0,58	3,1	2,3	1,8	1,5	1,3	1,2	1,0	0,9	0,030	
0,60	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,030	
0,62	2,9	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,031	
0,63	2,9	2,2	1,7	1,5	1,2	1,1	1,0	0,9	0,031	

Tabela A-2 – Valores de  $K_c$  e  $K_s$  para os aços CA-25, CA-50 e CA-60 (para concretos do Grupo I de resistência –  $f_{ck} \leq 50$  MPa,  $\gamma_c = 1,4$ ,  $\gamma_s = 1,15$ ).

FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES												
$\beta_x = \frac{x}{d}$	$K_c$ (cm <sup>2</sup> /kN)								$K_s$ (cm <sup>2</sup> /kN)			Dom.
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-25	CA-50	CA-60	
0,01	137,8	103,4	82,7	68,9	59,1	51,7	45,9	41,3	0,046	0,023	0,019	2
0,02	69,2	51,9	41,5	34,6	29,6	25,9	23,1	20,8	0,046	0,023	0,019	
0,03	46,3	34,7	27,8	23,2	19,8	17,4	15,4	13,9	0,047	0,023	0,019	
0,04	34,9	26,2	20,9	17,4	14,9	13,1	11,6	10,5	0,047	0,023	0,019	
0,05	28,0	21,0	16,8	14,0	12,0	10,5	9,3	8,4	0,047	0,023	0,020	
0,06	23,4	17,6	14,1	11,7	10,0	8,8	7,8	7,0	0,047	0,024	0,020	
0,07	20,2	15,1	12,1	10,1	8,6	7,6	6,7	6,1	0,047	0,024	0,020	
0,08	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,6	5,9	5,3	0,048	0,024	0,020	
0,09	15,8	11,9	9,5	7,9	6,8	5,9	5,3	4,7	0,048	0,024	0,020	
0,10	14,3	10,7	8,6	7,1	6,1	5,4	4,8	4,3	0,048	0,024	0,020	
0,12	12,0	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	4,0	3,6	0,048	0,024	0,020	
0,13	11,1	8,4	6,7	5,6	4,8	4,2	3,7	3,3	0,049	0,024	0,020	
0,14	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,049	0,024	0,020	
0,15	9,7	7,3	5,8	4,9	4,2	3,7	3,2	2,9	0,049	0,024	0,020	
0,16	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,7	0,049	0,025	0,020	
0,17	8,7	6,5	5,2	4,3	3,7	3,2	2,9	2,6	0,049	0,025	0,021	
0,18	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,050	0,025	0,021	
0,19	7,8	5,9	4,7	3,9	3,4	2,9	2,6	2,3	0,050	0,025	0,021	
0,20	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,050	0,025	0,021	
0,21	7,1	5,4	4,3	3,6	3,1	2,7	2,4	2,1	0,050	0,025	0,021	
0,22	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,050	0,025	0,021	
0,23	6,6	4,9	3,9	3,3	2,8	2,5	2,2	2,0	0,051	0,025	0,021	
0,24	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,051	0,025	0,021	
0,25	6,1	4,6	3,7	3,1	2,6	2,3	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021	
0,26	5,9	4,4	3,5	2,9	2,5	2,2	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021	
0,27	5,7	4,3	3,4	2,8	2,4	2,1	1,9	1,7	0,052	0,026	0,021	
0,28	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,052	0,026	0,022	
0,29	5,4	4,0	3,2	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6	0,052	0,026	0,022	
0,30	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	1,9	1,7	1,6	0,052	0,026	0,022	
0,31	5,1	3,8	3,0	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	0,053	0,026	0,022	
0,32	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,053	0,026	0,022	
0,33	4,8	3,6	2,9	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	0,053	0,026	0,022	
0,34	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,053	0,027	0,022	
0,35	4,6	3,4	2,7	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4	0,053	0,027	0,022	
0,36	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,054	0,027	0,022	
0,37	4,4	3,3	2,6	2,2	1,9	1,6	1,5	1,3	0,054	0,027	0,022	
0,38	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,054	0,027	0,023	
0,40	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,055	0,027	0,023	
0,42	3,9	2,9	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,055	0,028	0,023	
0,44	3,8	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,056	0,028	0,023	
0,45	3,7	2,8	2,2	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,056	0,028	0,023	
0,46	3,7	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	0,056	0,028	0,023	
0,48	3,5	2,7	2,1	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	0,057	0,028	0,024	
0,50	3,4	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0	0,058	0,029	0,024	
0,52	3,3	2,5	2,0	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,058	0,029	0,024	
0,54	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,059	0,029	0,024	
0,56	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,9	0,059	0,030	0,025	
0,58	3,1	2,3	1,8	1,5	1,3	1,2	1,0	0,9	0,060	0,030	0,025	
0,59	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,060	0,030	0,025	
0,60	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,061	0,030	0,025	
0,62	2,9	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,061	0,031	0,025	
0,63	2,9	2,2	1,7	1,5	1,2	1,1	1,0	0,9	0,061	0,031	0,026	
0,64	2,9	2,2	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,062	0,031	0,026	
0,66	2,8	2,1	1,7	1,4	1,2	1,1	0,9	0,8	0,063	0,031	0,026	
0,70	2,7	2,0	1,6	1,4	1,2	1,0	0,9	0,8	0,064	0,032	0,027	
0,74	2,6	2,0	1,6	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,065	0,033	0,027	
0,77	2,6	1,9	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,066	0,033	0,028	

**Tabela A-3 – Valores de cálculo da tensão ( $\sigma'_{sd}$ ) e da deformação ( $\varepsilon'_{sd}$ ) na armadura comprimida e coeficiente  $K'_s$ , para a linha neutra fixada em  $0,45d$  (para concretos do Grupo I de resistência –  $f_{ck} \leq 50$  MPa,  $\gamma_s = 1,15$ ).**

d'/d	Deformação $\varepsilon'_{sd}$ (‰) (CA-25 ; CA-50 ; CA-60)	$\sigma'_{sd}$ (MPa)			$K'_s = 1/\sigma'_{sd}$ (1/kN/cm <sup>2</sup> )			
		CA-25	CA-50	CA-60	CA-25	CA-50	CA-60	
0,05	3,11	217,4	435,0	521,7	0,046	0,023	0,019	
0,10	2,72			521,7				
0,15	2,33			490,9				
0,20	1,94			408,4				409,1
0,25	1,56			326,7				327,3
0,30	1,17			245,0				245,4



## ANEXOS

### 16. ANEXO A – FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

Como opção às formulações para a Flexão Composta Normal apresentadas no item 3, apresenta-se a seguir equações com uma abordagem um pouco diferente, como opção àquelas. A metodologia a seguir toma como base àquelas de Fusco (1981).

#### 16.1 Tração Simples e Flexo-Tração com Pequena Excentricidade

Na *tração simples* e na *tração com pequena excentricidade* a seção transversal encontra-se inteiramente tracionada e fissurada, sendo o Estado-Limite Último (ELU) caracterizado pela deformação plástica de 10 % na armadura mais tracionada ( $A_s$  - Figura 174). As duas armaduras são tracionadas ( $A_s$  e  $A'_s$ ).

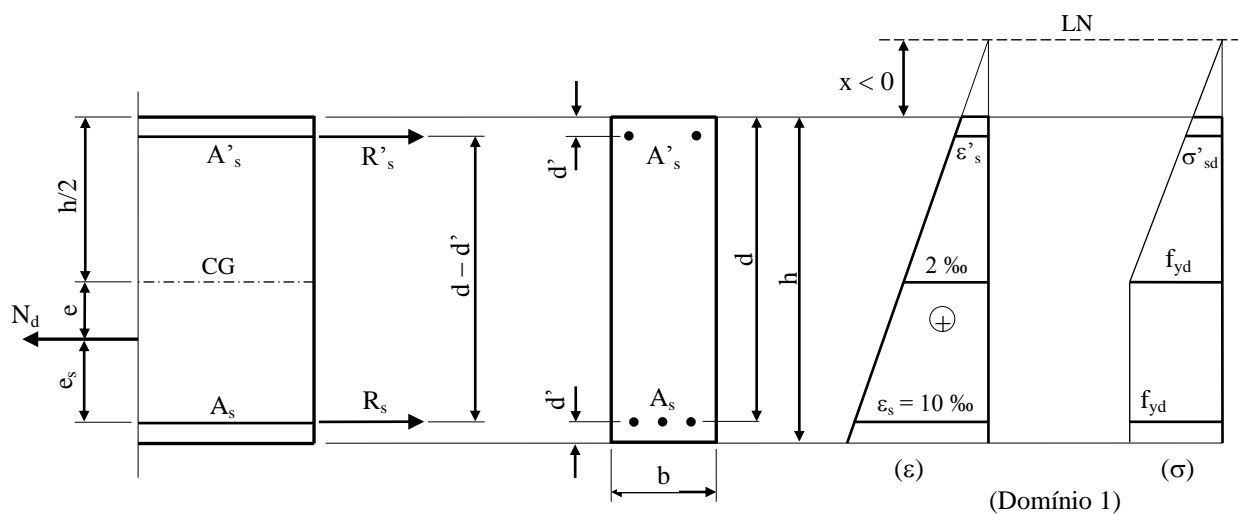


Figura 174 – FCN em tirante de seção retangular com duas armaduras tracionadas no domínio 1.

No domínio 1, a LN varia no intervalo  $-\infty < x < 0$ , e a armadura  $A'_s$  ainda estará tracionada com a posição da linha neutra (LN) até  $x < d'$  (subdomínio 2a'), ou seja, no cobrimento da armadura  $A'_s$ . A tensão na armadura mais tracionada ( $A_s$ ) é  $\sigma_{sd} = f_{yd}$ . Entre as infinitas soluções, a solução econômica é fazer  $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$  ( $\sigma'_{sd} = f_{yd}$ ).

#### a) Equações de equilíbrio

Conforme as forças normais mostradas na Figura 174, tem-se:

$$N_d = R_s + R'_s$$

$$\text{com } R_s = A_s f_{yd} \quad \text{e} \quad R'_s = A'_s \sigma'_{sd}$$

$$N_d = A_s f_{yd} + A'_s \sigma'_{sd} \tag{Eq. 115}$$

Fazendo somatório de momentos fletores em  $R_s$ , tem-se:

$$N_d e_s = R'_s (d - d')$$

$$N_d = R'_s \frac{d - d'}{e_s} \tag{Eq. 116}$$

E fazendo somatório de momentos fletores em  $R'_s$ :

$$N_d (d - d' - e_s) = R_s (d - d')$$

$$N_d = R_s \frac{d - d'}{d - d' - e_s} \quad \text{Eq. 117}$$

### b) Cálculo de Verificação

O valor da força normal de tração  $N_d$  é o menor valor de:

$$N_d \leq \begin{cases} N_{d,1} = A'_s f_{yd} \frac{d - d'}{e_s} \\ N_{d,2} = A_s f_{yd} \frac{d - d'}{d - d' - e_s} \end{cases} \quad \text{Eq. 118}$$

com  $0 \leq e_s \leq (d - d')/2$ . Ocorrerá  $N_{d,1} = N_{d,2}$  quando a posição  $x$  da LN for grande o suficiente para que  $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$ , portanto,  $\sigma'_{sd} = f_{yd}$ .

### c) Cálculo de Dimensionamento

Pode ser imposta a condição de  $\sigma'_{sd} = \sigma_{sd} = f_{yd}$ , ficando como incógnitas  $A_s$  e  $A'_s$  na Eq. 116 e Eq. 117, tal que:

$$A'_s = \frac{N_d e_s}{f_{yd} (d - d')} \quad \text{Eq. 119}$$

$$A_s = \frac{N_d (d - d' - e_s)}{f_{yd} (d - d')} \quad \text{Eq. 120}$$

o que implica  $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$ , domínio 1 e reta **b**, e  $-\infty < x < (d\varepsilon_{yd} - 10d')/(\varepsilon_{yd} - 10)$ .

### d) Equação de Compatibilidade

Com semelhança de triângulos é definida a equação de compatibilidade de deformações:

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{d' - x} = \frac{\varepsilon_{s1}}{d - x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{s2} = \varepsilon_{s1} \frac{d' - x}{d - x} \quad \text{Eq. 121}$$

#### 16.1.1 Exemplo 1

Para o Exemplo 1 apresentado no item 3.1.1, calcular as armaduras  $A_s$  e  $A'_s$  para a seção retangular submetida à *flexo-tração*, com força normal  $N_k = 1.000$  kN e momento fletor  $M_k = 10.000$  kN.cm. Considerar: concreto C35 ; aço CA-50 ( $f_{yd} = 43,5$  kN/cm<sup>2</sup>); seção retangular  $b = 25$  cm e  $h = 80$  cm ;  $d = 76$  cm ;  $d' = 4$  cm ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$  (Figura 175).

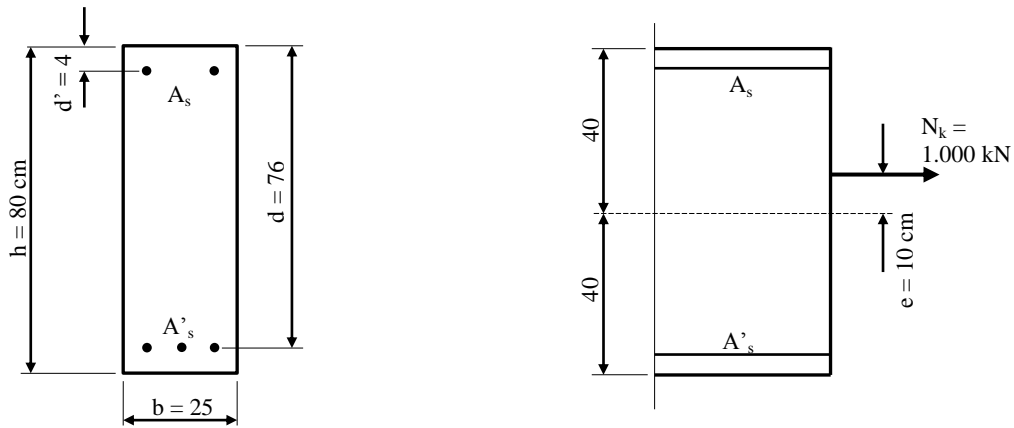


Figura 175 – Flexo-tração com pequena excentricidade em seção retangular.

### Resolução

A excentricidade da força normal em relação ao CG da seção transversal é:  $e = M_k / N_k = 10.000/1.000 = 10,0$  cm. E em relação à armadura  $A_s$  é:  $e_s = h/2 - d' + e = 40 - 4 + 10 = 46,0$  cm.

O problema é de dimensionamento de tirante na *flexo-tração com pequena excentricidade*, com duas armaduras tracionadas, LN no intervalo  $-\infty < x < d'$ , e infinitas soluções caso não se fixe a posição  $x$  da LN. A solução econômica é aplicar na armadura menos tracionada também a máxima tensão que o aço pode resistir:  $\sigma'_{sd} = f_{yd} = 435$  MPa, ou seja,  $\epsilon'_s \geq \epsilon_{yd}$  (Figura 176).

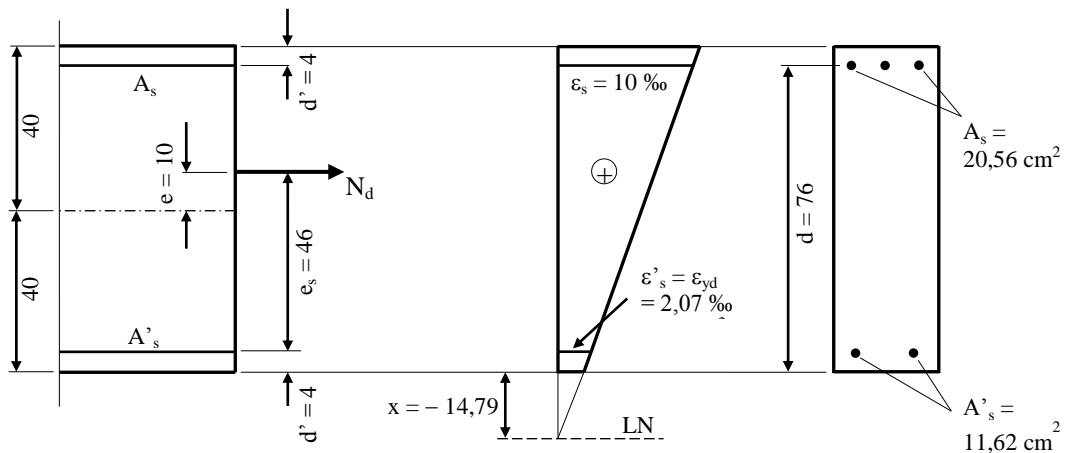


Figura 176 – Solução numérica adotada.

Com a Eq. 119 e Eq. 120 e  $\sigma'_{sd} = \sigma_{sd} = f_{yd}$ , tem-se:

$$A'_s = \frac{N_d e_s}{f_{yd} (d - d')} = \frac{(1,4 \cdot 1000) 46}{43,5 (76 - 4)} = 20,56 \text{ cm}^2$$

$$A_s = \frac{N_d (d - d' - e_s)}{f_{yd} (d - d')} = \frac{(1,4 \cdot 1000) (76 - 4 - 46)}{43,5 (76 - 4)} = 11,62 \text{ cm}^2$$

Posição da LN (Eq. 121) com  $\epsilon_s = 10 \text{ ‰}$  e  $\epsilon'_s = \epsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$ :

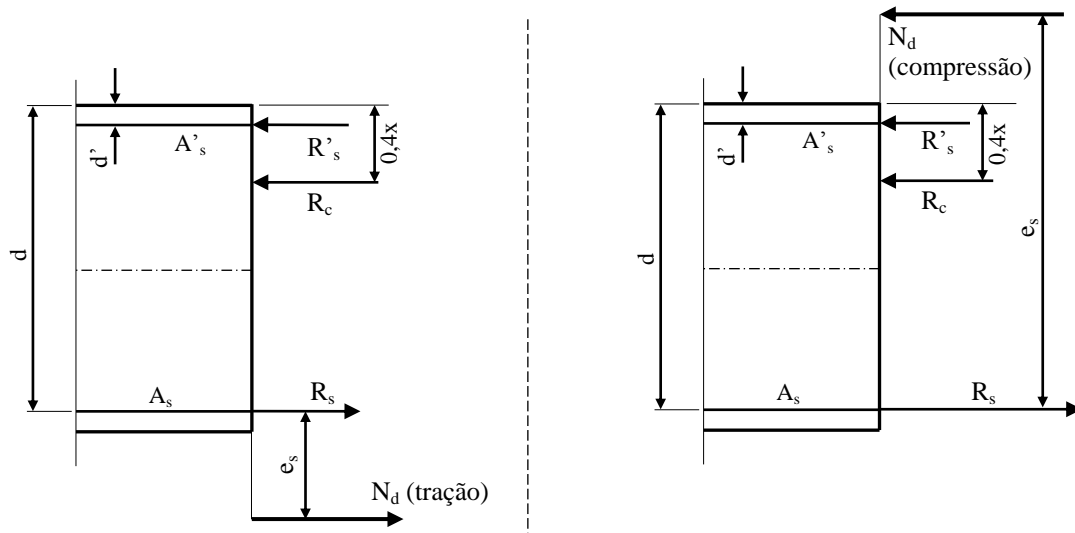
$$\frac{\epsilon'_s}{d' - x} = \frac{\epsilon_s}{d - x} \quad \rightarrow \quad \frac{2,07}{4 - x} = \frac{10}{76 - x} \quad \rightarrow \quad x = -14,79 \text{ cm} \quad (\text{Figura 176})$$

Comparando com o valor absoluto de  $x$  para a LN ( $|-14,79|$  cm), valores menores proporcionam armaduras  $A'_s$  maiores que a calculada, pois resultam deformações  $\epsilon'_s < \epsilon_{yd}$ , e valores maiores para  $x$  não alteram  $A'_s$ , pois resultam sempre tensões  $\sigma'_{sd} = f_{yd}$ .

## 16.2 Flexo-Compressão e Flexo-Tração com Grande Excentricidade

Na *flexão composta com grande excentricidade* o esforço predominante é o momento fletor ( $M$ ). Os domínios que ocorrem são o 2, 3, 4 e 4a (ver Figura 7), e inclui a flexão simples, quando a força normal não existe ( $N = 0$ ). Como nos domínios 2, 3 e 4<sup>96</sup> a LN encontra-se dentro da seção transversal, uma armadura é tracionada ( $A_s$ ) e a outra é comprimida ( $A'_s$ ), Figura 177. Os casos de solitação são a *flexo-tração* e a *flexo-compressão com grande excentricidade*. Exemplos de elementos são: tirante, pilar, viga e laje.

A LN encontra-se no intervalo  $0 < x < h$ . O ELU é caracterizado pela deformação de alongamento no aço de 10 ‰ no domínio 2, e pela deformação de encurtamento no concreto de 3,5 ‰ nos domínios 3, 4 e 4a. As equações de equilíbrio são divididas conforme a força normal, se de compressão ou de tração (Figura 177).



### Flexo-tração:

$$N_d = R_s - R_c - R'_s$$

$$N_d e_s = R_c (d - 0,4x) + R'_s (d - d')$$

### Flexo-compressão:

$$N_d = R_c + R'_s - R_s$$

$$N_d e_s = R_c (d - 0,4x) + R'_s (d - d')$$

Figura 177 – Equilíbrio de forças normais na flexo-tração e flexo-compressão com grande excentricidade.

As equações contidas na Figura 177 podem se tornar idênticas caso a força  $N_d$  para a *flexo-tração* seja colocada com sinal negativo ( $N_d < 0$ ). Tomando as equações da *flexo-compressão* tem-se:

$$N_d = R_c + R'_s - R_s \quad \text{Eq. 122}$$

$$N_d e_s = R_c (d - 0,4x) + R'_s (d - d') \quad \text{Eq. 123}$$

com  $N_d > 0$  para *compressão* e  $N_d < 0$  para *tração*,<sup>97</sup> e o momento fletor ( $M_d = N_d e_s$ ) tomado no CG da armadura tracionada  $A_s$ .<sup>98</sup> As forças resultantes são:

$$R_c = 0,68b x f_{cd} \quad , \text{ com o diagrama } \textit{retangular simplificado} \quad \text{Eq. 124}$$

$$R_s = A_s \sigma_{sd} \quad ; \quad R'_s = A'_s \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 125}$$

As equações de compatibilidade de deformações para os domínios 2, 3, 4 e 4a são:

<sup>96</sup> No entanto, no domínio 4a ambas as armaduras estarão comprimidas.

<sup>97</sup> Em Fusco (1981) encontra-se esta formulação, e fazendo  $N_d = 0$  e  $N_d e_s = M_d$  tem-se a flexão simples.

<sup>98</sup> Fusco (1981, p.49) também apresenta a dedução de equações adimensionais com coeficientes tabelados que auxiliam no cálculo de seções submetidas à flexão composta com grande excentricidade.

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \text{Eq. 126}$$

$$\frac{\varepsilon_s}{1-\beta_x} = \frac{\varepsilon'_s}{\beta_x - \frac{d'}{d}} = \frac{\varepsilon_c}{\beta_x} \quad \text{Eq. 127}$$

com  $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$  para o domínio 2,  $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$  para os domínios 3, 4 e 4a, e com  $\varepsilon_s < 0$  (negativo) quando a armadura  $A_s$  for comprimida (somente domínio 4a).

### 16.2.1 Exemplo 1

Para o Exemplo 1 do item 3.2.4, calcular as armaduras para a seção retangular submetida à *flexo-compressão*, com força normal  $N_d = 2.000 \text{ kN}$  e momento fletor  $M_d = 100.000 \text{ kN.cm}$ . São conhecidos: concreto C30 ; aço CA-50 ( $f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ ) ; seção retangular  $b = 25 \text{ cm}$  e  $h = 80 \text{ cm}$  ;  $d = 76 \text{ cm}$  ;  $d' = 4 \text{ cm}$  ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$  (Figura 178).

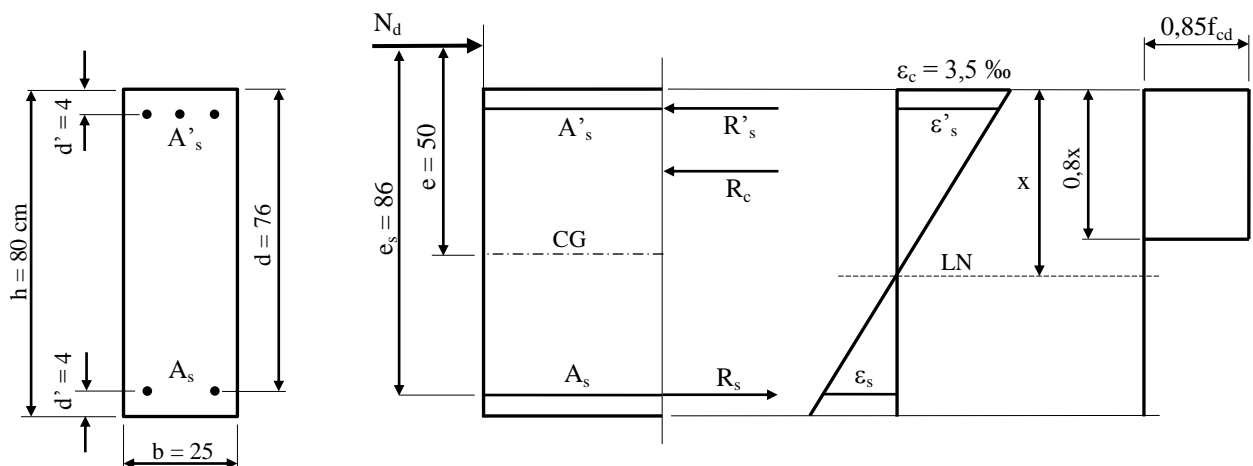


Figura 178 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular, nos domínios 3 e 4.

### Resolução

A excentricidade da força normal é:  $e = M_d / N_d = 100.000 / 2.000 = 50,0 \text{ cm}$ , grande relativamente à altura da peça (problema de *flexo-compressão com grande excentricidade*). O problema admite infinitas soluções, em função da posição  $x$  da LN. O domínio 3 é o econômico.

Fazendo no limite entre os domínios 3 e 4, tem-se:  $x = x_{3\text{lim}}$ ,  $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ ,  $\varepsilon_s = \varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$  e  $\sigma_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ . Portanto:

$$x_{3\text{lim}} = 0,63d = 0,63 \cdot 76 = 47,88 \text{ cm}$$

A deformação na armadura comprimida, com  $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ , é (Eq. 126):

$$\frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon'_s}{47,88-4} = \frac{3,5}{47,88} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_s = 3,21 \text{ ‰}$$

$\varepsilon'_s = 3,21 \text{ ‰} > \varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$ , de modo que também  $\sigma'_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ . A excentricidade de  $N_d$  com a armadura tracionada é:

$$e_s = e + h/2 - d' = 50 + 40 - 4 = 86 \text{ cm}$$

As forças resultantes são (Eq. 123), Figura 178:

$$N_d = R_c + R'_s - R_s$$

$$N_d e_s = R_c (d - 0,4x) + R'_s (d - d')$$

Substituindo as variáveis pelos valores numéricos:

$$\begin{cases} 2.000 = 0,68 \cdot 25 \cdot 47,88 \frac{3,0}{1,4} + A'_s 43,5 - A_s 43,5 \\ 2.000 \cdot 86,0 = 0,68 \cdot 25 \cdot 47,88 \frac{3,0}{1,4} (76 - 0,4 \cdot 47,88) + 43,5 A'_s (76 - 4) \end{cases}$$

com  $N_d > 0$  para *compressão* e  $N_d < 0$  para *tração*.

$$\begin{cases} A'_s - A_s = 5,88 \\ A'_s = 23,26 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_s = 17,38 \text{ cm}^2 & (\text{armadura tracionada}) \\ A'_s = 23,26 \text{ cm}^2 & (\text{armadura comprimida}) \end{cases}$$

Outras diversas soluções também econômicas são possíveis com diferentes valores para  $x$  no domínio 3, e que proporcionam outros pares de armadura  $A_s$  e  $A'_s$ .

### 16.2.2 Exemplo 2

Calcular as armaduras da seção do Exemplo 4 (item 3.2.8), sendo: força normal de compressão  $N_k = 500$  kN ; momento fletor  $M_k = 40.000$  kN.cm ;  $e = 80$  cm ; C25 ; CA-50 ;  $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$  (Figura 179).

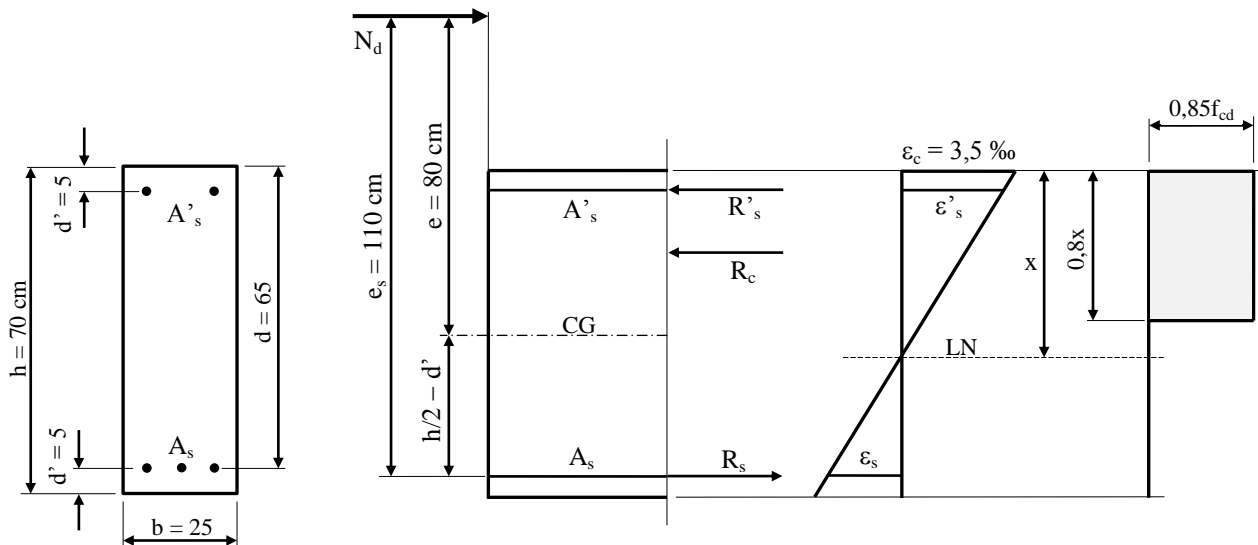


Figura 179 – Flexo-compressão com grande excentricidade em seção retangular, nos domínios 3 e 4.

### Resolução

Com a excentricidade da força normal  $e = 80,0$  cm, o problema é de *flexo-compressão com grande excentricidade*. O problema admite infinitas soluções, em função da posição  $x$  da LN. Será adotada a mesma solução feita no Exemplo 4, no domínio 3 com  $x = 40,0$  cm, valor um pouco inferior a  $x_{3lim} = 0,63d = 0,63 \cdot 65 = 40,95$  cm.

As deformações nas armaduras tracionada e comprimida, com  $\epsilon_c = 3,5$  ‰, são (Eq. 126):

$$\frac{\epsilon_s}{d - x} = \frac{\epsilon_c}{x} \rightarrow \frac{\epsilon_s}{65 - 40,0} = \frac{3,5}{40,0} \rightarrow \epsilon_s = 2,19 \text{ ‰}$$

$$\frac{\epsilon'_s}{x - d'} = \frac{\epsilon_c}{x} \rightarrow \frac{\epsilon'_s}{40,0 - 5} = \frac{3,5}{40,0} \rightarrow \epsilon'_s = 3,06 \text{ ‰}$$

como  $\varepsilon_s = 2,19 \text{ ‰}$  e  $\varepsilon'_s = 3,06 \text{ ‰}$  são maiores que  $\varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$ , as tensões são  $\sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ . A excentricidade de  $N_d$  com a armadura tracionada é:

$$e_s = e + h/2 - d' = 80 + 35 - 5 = 110,0 \text{ cm}$$

As forças resultantes são (Eq. 123):

$$N_d = R_c + R'_s - R_s$$

$$N_d e_s = R_c (d - 0,4x) + R'_s (d - d')$$

Substituindo as variáveis pelos valores numéricos:

$$\begin{cases} 1,4 \cdot 500 = 0,68 \cdot 25 \cdot 40,0 \frac{2,5}{1,4} + A'_s 43,5 - A_s 43,5 \\ 1,4 \cdot 500 \cdot 110,0 = 0,68 \cdot 25 \cdot 40,0 \frac{2,5}{1,4} (65 - 0,4 \cdot 40,0) + 43,5 A'_s (65 - 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'_s - A_s = -11,82 \\ A'_s = 6,70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_s = 18,52 \text{ cm}^2 & \text{(armadura tracionada)} \\ A'_s = 6,70 \text{ cm}^2 & \text{(armadura comprimida)} \end{cases}$$

Resultados coincidentes àqueles calculados no Exemplo 4.

### 16.3 Compressão Simples e Flexo-Compressão com Pequena Excentricidade

O esforço predominante é a força normal de compressão ( $N_d$ ), e devido à excentricidade tem-se a *flexo-compressão com pequena excentricidade*. Nos domínios 4a e 5 e na reta **b** a seção transversal encontra-se inteiramente comprimida, bem como as armaduras  $A_s$  e  $A'_s$  (Figura 180).

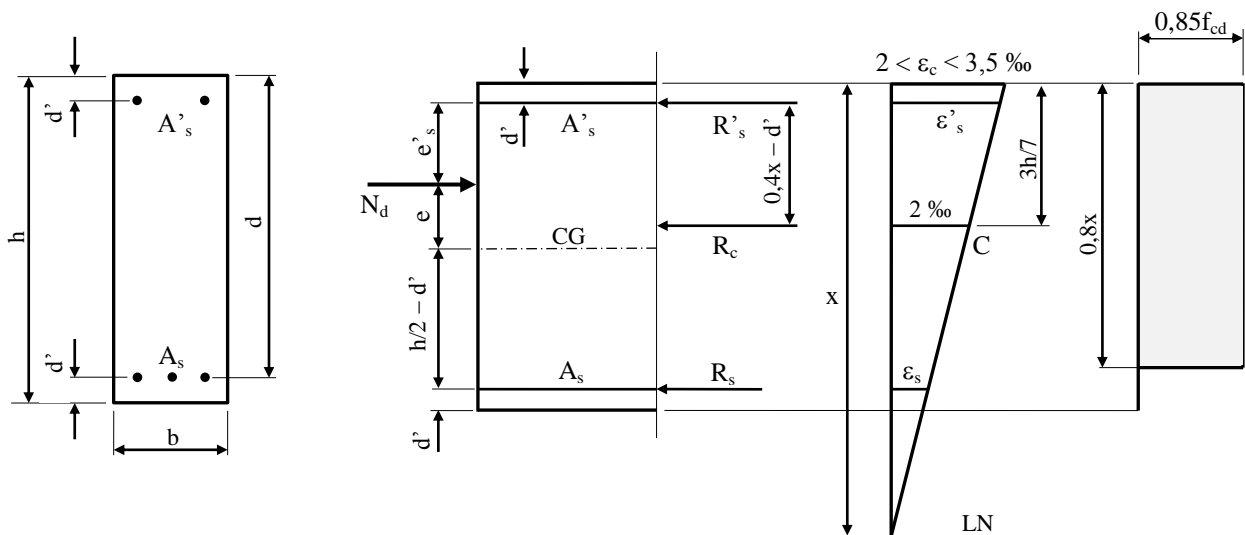


Figura 180 – FCN em seção retangular com duas armaduras comprimidas.

No domínio 5 a linha neutra (LN) encontra-se no intervalo entre  $h < x < +\infty$ , caracterizado pela deformação de  $2,0 \text{ ‰}$  a  $3h/7$ . O problema é resolvido de modo geral segundo duas soluções: armadura unilateral ( $A_s = 0$ ) com  $0,8x < h$ , ou com duas armaduras ( $A_s$  e  $A'_s$ ) na reta **b**, com  $0,8x \geq h$ ,  $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon'_s = 2 \text{ ‰}$ , e LN no  $+\infty$ .

As equações de equilíbrio consideram as forças mostradas na Figura 180, com somatório de momentos fletores tomados na linha de ação da armadura mais comprimida ( $A'_s$ ), com diagrama *retangular simplificado* de tensões no concreto:

$$N_d = R_c + R'_s + R_s$$

$$M'_{sd} = N_d e'_s = R_c (0,4x - d') + R_s (d - d') \quad \text{Eq. 129}$$

No domínio 5 as equações de compatibilidade são:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_s}{x - d} = \frac{\varepsilon'_s}{x - d'} = \frac{2}{x - \frac{3}{7}h} \quad \text{Eq. 130}$$

$$\frac{\varepsilon_s}{\beta_x - 1} = \frac{\varepsilon'_s}{\beta_x - \frac{d'}{d}} = \frac{2}{\beta_x - \frac{3h}{7d}} \quad \text{Eq. 131}$$

### 16.3.1 Definição das Armaduras

Considerando a máxima força relativa ao concreto comprimido ( $R_c$ ) que pode ocorrer na seção, e fazendo o equilíbrio de momentos fletores na armadura comprimida  $A'_s$  fica (Figura 181):

$$M_d = N_d e'_s = R_c (h/2 - d') + R_s (d - d') \quad , \text{ com } R_c = 0,85f_{cd} b h$$

Tomando  $A_s = 0$  define-se a excentricidade de  $N_d$  em relação à linha de ação de  $A'_s$  :

$$e'_s = \frac{0,85f_{cd} b h}{N_d} \left( \frac{h}{2} - d' \right)$$

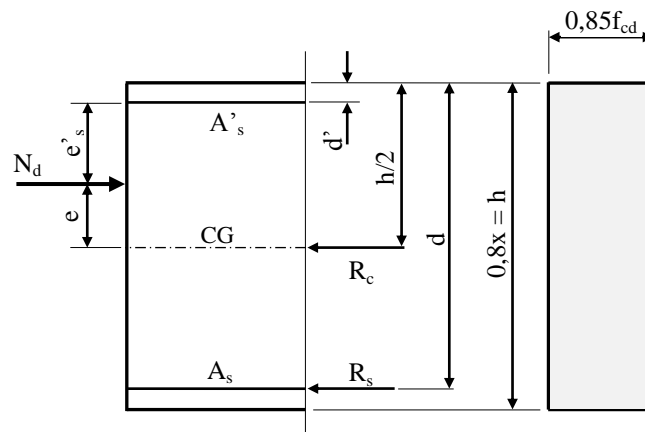


Figura 181 – Definição da excentricidade  $e'_s$ .

Com a excentricidade  $e'_s$  a força normal  $N_d$  é absorvida apenas pela área de concreto comprimido e pela armadura mais comprimida ( $A'_s$ ), sem auxílio da armadura menos comprimida ( $A_s$ ), de modo que  $e'_s$  delimita a necessidade ou não da armadura menos comprimida. Fazendo  $e'_s$  como um valor limite tem-se:

$$e'_s \leq e'_{s,\text{lim}} \quad \rightarrow \text{ armadura unilateral (somente } A'_s) \quad \text{Eq. 132}$$

$$e'_s > e'_{s,\text{lim}} \quad \rightarrow \text{ armadura dupla (} A'_s \text{ e } A_s)$$

com:

$$e'_s = h/2 - e - d' \quad \text{Eq. 133}$$

$$e'_{s,\text{lim}} = \frac{0,85f_{cd} b h}{N_d} \left( \frac{h}{2} - d' \right) \quad \text{Eq. 134}$$

### 16.3.2 Armadura Unilateral

Com  $A_s = 0$ , a Eq. 135 e a Eq. 136 tornam-se (Figura 182):

$$N_d = R_c + R'_s \quad \text{Eq. 135}$$

$$M'_{sd} = N_d e'_s = R_c (0,4x - d') \quad \text{Eq. 136}$$

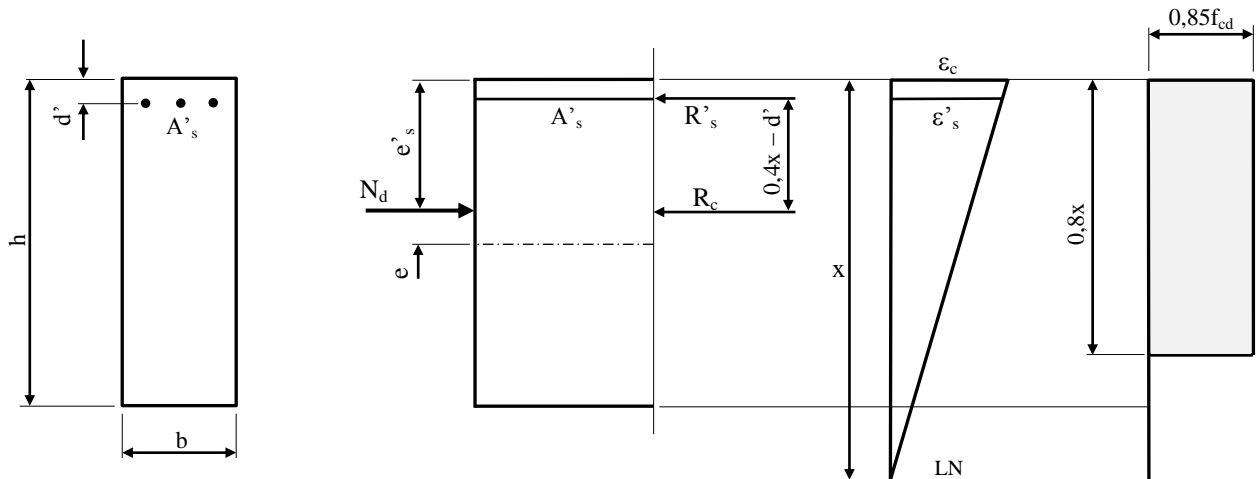


Figura 182 – Armadura unilateral.

### 16.3.3 Compressão Simples

Neste caso, toda a altura ( $h$ ) da seção está submetida a tensões de compressão, conforme o diagrama *retangular simplificado* (Figura 183). A resultante no concreto comprimido está aplicada em  $h/2$  e tem o valor:  $R_c = 0,85b h f_{cd}$ . A força normal e o momento fletor têm os valores:

$$N_d = R_c + R'_s + R_s$$

$$N_d = 0,85b h f_{cd} + A_s \sigma_{sd} + A'_s \sigma'_{sd} \quad \text{Eq. 137}$$

$$M'_{sd} = N_d e'_s = R_c (0,4x - d') + R_s (d - d')$$

$$M'_{sd} = N_d e'_s = 0,85b h f_{cd} (0,4x - d') + A_s \sigma_{sd} (d - d') \quad \text{Eq. 138}$$

Na reta **b** tem-se:  $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon'_s = 2 \text{ ‰}$ , com a tensão correspondente na armadura de 420 MPa para o aço CA-50.

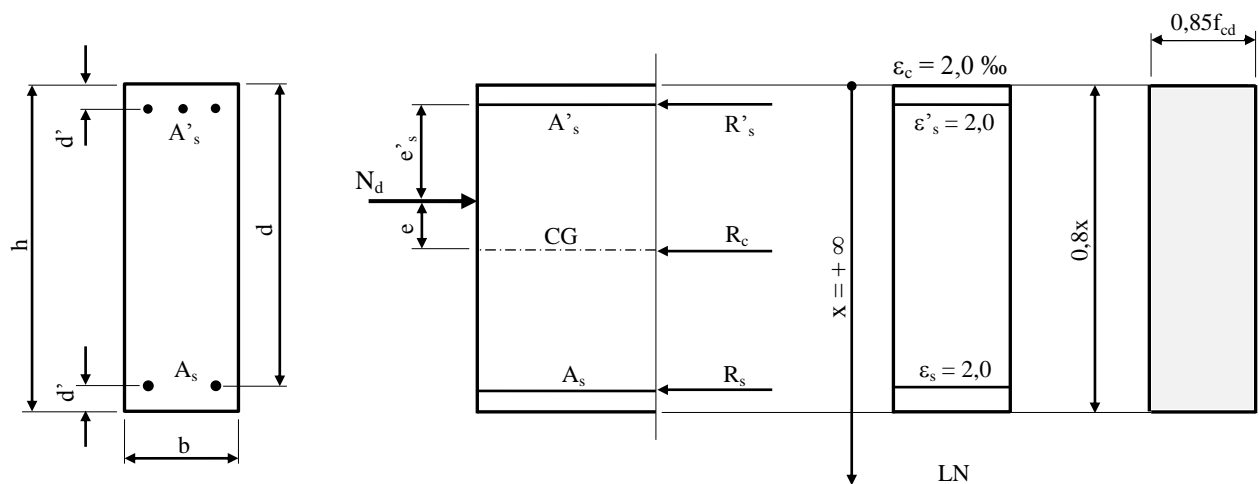


Figura 183 – Duas armaduras comprimidas na Compressão Simples (reta b).